Esercizi — foglio 2 (ancora sulle curve)

Es. 1 Provare che una curva in cui sia assegnato, in ciascun punto il versore binormale $\underline{b}(s)$ che abbia torsione NON NULLA in ciascun punto ha determinata curvatura e modulo della torsione.

Es. 2* Provare che la conoscenza del versore normale per una curva non piana determina $\tau(s)$ e $k(s)$.

Es. 3 Provare che la curva $\alpha(t)=(t, t^2, t^3)$ NON e' contenuta in un piano.

Es. 4 Stabilire se la curva $\alpha(t)=(4\cos t, 4\sin t, 4\cos t)$ e' contenuta in un piano e trovare il piano OSCULATORE.

Es. 5 Data la curva $\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=x^4+y^4-xy=1\}$ calcolare la sua curvatura nel punto $p=(0,1)$

Es. 6 Siano $\alpha(s)$ e $\sigma(s)$ due curve distinte ~~piane~~ $: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.c.

$$\boxed{\underline{b}_\alpha(s) = b_\sigma(s)}$$

provare che sono piane

Es. 7 Sia $\gamma(t)$ una curva data come intersezione di due luoghi $\subseteq \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z)=0$ e $g(x,y,z)=0$

$$\gamma(t)=\mathcal{C}=\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

nei punti in cui $\operatorname{grad} f \wedge \operatorname{grad} g \neq 0$

trovare $(x', y', z') = \gamma'(t)$

SCUOLA NORMALE SUPERIORE PISA

$\boxed{\text{ES. 8}}$ Studiare la curva

$$\mathcal{C} = \begin{cases} x^3 + yz + 1 = 0 \\ y^2 + z^2 = x^2 \end{cases}$$

DIRE se tutti i punti sono regolari.

$\boxed{\text{ES. 9}}$ Sia $P = P(s)$ una curva biregolare su di una sfera $S^2(R)$ a curvatura costante. Provare che $P(s)$ e' un arco di circonferenza.

$\boxed{\text{ES. 10}}$ Sia data una curva nel piano in coordinate polari. Determinare la funzione curvatura e verificare che se

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad K = \frac{|2r'^2 + r^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

SCUOLA
NORMALE
SUPERIORE
PISA