FOGLIO 3

ES 1 Sia C la figura a "8" nel piano xy e sia S la superficie cilindrica su C, cioe'

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in C \}$$

E' una superficie regolare? GIUSTIFICARE LA RISPOSTA

ES 2 COSTRUIRE un diffeomorfismo fra l' ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ e la sfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

ES 3 (a) Provare che l'equazione del piano tangente ad una superficie regolare in (x_0, y_0, z_0) data come $f(x,y,z) = 0$ dove 0 e' un valore regolare di f e'

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

(b) Trovare i piani tangenti a $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ nei punti $(x, y, 0)$ e provare che sono tutti paralleli all'asse z.

ES 4 (a) Provare che l'equazione del piano tangente ad una ~~curva~~ ~~la~~ superficie data come grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e' data da

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

(b) Provare che i piani tangenti alla superficie data da $z = x f(y/x)$ $x \neq 0$ con f differenziabile, passano tutti dall'origine $(0,0,0)$

ES 5 Provare che ciascuna delle equazioni $(a, b, c \neq 0)$

$$x^2+y^2+z^2 = ax$$
$$x^2+y^2+z^2 = by$$
$$x^2+y^2+z^2 = cz$$

definisce una superficie regolare e che queste si intersecano ortogonalmente.

ES 6 Sia S una superficie di rotazione e C la sua generatrice. Supponiamo che C sia parametrizzata mediante ascissa curvilinea s. Sia $\rho(s)$ la distanza dall'asse di rotazione del punto di C corrispondente a s.

(a) [TEOREMA di PAPPO] Provare che l'area di S e' data da

$$2\pi \int_0^{\ell} \rho(s)\, ds$$

dove ℓ e' la lunghezza della curva

(b) Usare la parte (a) per calcolare l'area del toro di rotazione.

ES 7 Calcolare la I° forma fondamentale delle seguenti superfici parametrizzate dove sono regolari.

(a) $\underline{x}(u,v) = (a \sin u \cos v,\ b \sin u \sin v,\ c \cos u)$ ELLISSOIDE

(b) $\underline{x}(u,v) = (a u \cos v,\ b u \sin v,\ u^2)$ PARABOLOIDE ELLITTICO

(c) $\underline{x}(u,v) = (a u \cosh v,\ b u \sinh v,\ u^2)$ ~~IPER~~ PARABOLOIDE IPERBOLICO

(d) $\underline{x}(u,v) = (a \sinh u \cos v,\ b \sinh u \sin v,\ c \cosh u)$ IPERBOLOIDE A DUE FALDE.

SCUOLA
NORMALE
SUPERIORE
PISA