ES 1 — svolti nella lezione 6

ESERCIZI con II° FORMA FOND

- Dimostrare che in un punto $p \in \Sigma$ ellittico il piano tangente $T_p\Sigma$ lascia la superficie tutta da una parte (in un intorno di p tutti i punti stanno dalla stessa parte rispetto a $T_p\Sigma$)

- Dimostrare che in un punto $p \in \Sigma$ Iperbolico avviene il contrario (in un intorno di p si trovano punti che stanno in parti diverse rispetto a $T_p\Sigma$)

- COSA ACCADE in p PARABOLICO? e in p piatto?

ES 2

Provare che $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ e' LINEA DI CURVATURA (i.e $\forall t\ \dot\alpha(t)$ e' una direzione principale)

$\Longleftrightarrow$ soddisfa all'equazione differenziale

$$a_{21}\dot u^2 + (a_{22} - a_{11})\dot u \dot v - a_{12}\dot v^2 = 0$$

1. TROVARE condizioni necessarie e sufficienti perche' le linee coordinate siano di CURVATURA.

2. Se $\underline{x}(u,v)$ e' UNA PARAMETRIZZAZIONE ORTOGONALE provare che le linee coordinate sono di curvatura $\Longleftrightarrow f = 0$

ES 3

Una curva $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ e' ASINTOTICA $\Longleftrightarrow \forall t\ \dot\alpha(t)$ e' una direzione asintotica (i.e $K_n(\dot\alpha(t)) = 0$)

1. Provare che $\alpha(t)$ e' ASINTOTICA $\Longleftrightarrow$ soddisfa all'equazione differenziale

$$e\dot u^2 + 2f\dot u\dot v + g\dot v^2 = 0$$

2. PROVARE che se p e' ellittico NON $\exists$ DIREZ asintotiche per p
3. " " p e' Iperbolico $\exists$ 2 DUE DIREZIONI ASINTOTICHE
4. p e' PARABOLICO $\exists !$ DIREZIONE ASINTOTICA.

5. • Provare che le linee di curvatura sono asintotiche $\Longleftrightarrow$ $e=0$, $g=0$

ES 4

Dimostrare che una superficie RIGATA non ha punti ellittici.

ES 5*

Dimostrare che Σ superficie compatta ha almeno un punto ellittico

ES 6*

Dimostrare - almeno localmente - che se Σ t.c. $\forall p$ $K_1(p) = K_2(p)$ allora Σ e' $\subseteq$ un pezzo di piano o un pezzo di sfera