ESERCIZI : (FOGLIO 6)

ESERCIZIO 1 Siano S_1 e S_2 DUE SUPERFICI REGOLARI $\subseteq \mathbb{R}^3$

- PROVARE che se φ e' un' ISOMETRIA fra S_1 e S_2 anche φ^{-1} lo e'

se S_3 e' un'altra superficie e

$\varphi : S_1 \to S_2$ e' un' ISOMETRIA

$\psi : S_2 \to S_3$ e' un' ISOMETRIA

- PROVARE che $\psi \circ \varphi$ e' un' ISOMETRIA fra S_1 e S_3

[CONSEGUENZA: l'insieme delle ISOMETRIE E' UN GRUPPO].

ESERCIZIO 2 TROVARE I SIMBOLI DI CHRISTOFFEL PER UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE.

ESERCIZIO 3 TROVARE L'ESPRESSIONE DEI SIMBOLI DI CHRISTOFFEL PER $\underline{x}$ PARAMETRIZZ. ORTOGONALE.

ESERCIZIO 4 PROVARE che se $\underline{x}$ e' una parametrizzazione ortogonale

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}$$

ESERCIZIO 5 Sia $\underline{x}$ una parametrizzazione ISOTERMA $E = G = \lambda(u,v)$ $F=0$

provare che

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\,\Delta(\log\lambda)$$

— ALTRI CONCETTI DI GEOMETRIA INTRINSECA —

ESERCIZIO 6 Sia $\underline{w}$ campo vettoriale su S, superficie regolare, sia $\alpha(t)$ curva su S per il punto p, $\alpha(0) = p$ $\alpha'(0) = y$. Consideriamo la restrizione di $\underline{w}$ alla curva $\alpha(t)$ (derivata rispetto a t di $\underline{w}|_{\alpha(t)}$)

Provare che la componente tangenziale di $\frac{dw}{dt}$

$$\frac{D\underline{w}}{dt} = \text{PROIEZIONE sullo spazio tangente di } \frac{dw}{dt}$$

DERIVATA COVARIANTE

e' un concetto INTRINSECO (dipende solo dai coeff della 1ª forma fondamentale)

ESERCIZIO 7 Sia $\underline{w}$ un campo vettoriale lungo $\underline{x}(u(t),v(t))$, diciamo che $\underline{w}$ e' PARALLELO $\Longleftrightarrow$ $\frac{Dw}{dt} = 0$

Provare che se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono campi paralleli allora

$$\langle \underline{v}(t), \underline{w}(t) \rangle = \text{cost}$$

e $|v(t)| = \text{cost}$; $|w(t)| = \text{cost}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 8}}$ Sia $\alpha(t)$ curva su S, consideriamo il campo $\alpha'(t) = w(t)$ lungo $\alpha(t)$. $\alpha(t)$ e' detta <u>GEODETICA</u> $\Longleftrightarrow$ $D\alpha'(t) = 0$

a. Provare che se $\alpha(t)$ e' una geodetica e una linea di curvatura $\Rightarrow$ e' piana

b. Provare che se $\alpha(t)$ e' UNA GEODETICA (non retta) piana $\Rightarrow$ allora e' una linea di CURVATURA

c. Trovare un esempio di una curva che sia piane e di curvatura ma non una geodetica.