– INIZIAMO le SUPERFICI –

LEZIONE 3 20 Marzo

Def: Una superficie elementare o foglio semplice di superficie in $\mathbb{R}^3$ e' un'applicazione

$$\underline{P}: V \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \underline{P}(u,v) = \big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big)$$

con V aperto di $\mathbb{R}^2$ $\quad V \cong \mathring{\mathbb{D}}^2$ t.c

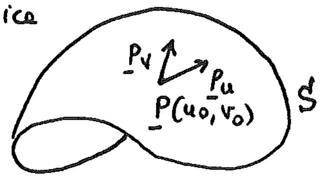
- $\underline{P}$ sia C^∞
- $\underline{P}$ sia INIETTIVA
- $\forall (\bar{u},\bar{v}) \in V$ la matrice Jacobiana

$$J(P)\Big|_{\bar{u},\bar{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}\Bigg|_{(\bar{u},\bar{v})}$$ ha rango massimo $= 2$

Def: Se $\underline{P}: V \to \mathbb{R}^3$ e' un foglio semplice, l'immagine $\underline{P}(V) \subseteq \mathbb{R}^3$ e' detta <u>SOSTEGNO</u> di $\underline{P}$.

Sia $(u_0, v_0) = \underline{u}_0 \in V$ e $\underline{P}: V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un foglio semplice

Sia $S = \underline{P}(V)$ il sostegno di $\underline{P}$.



- I vettori $\underline{P}_u|_{\underline{u}_0} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)\Big|_{\underline{u}_0}$ $\quad \underline{P}_v|_{\underline{u}_0} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)\Big|_{\underline{u}_0}$

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow$ GENERANO UNO SPAZIO VETTORIALE di dim 2 detto <u>SPAZIO VETTORIALE TANGENTE</u> a S in $P_0 = \underline{P}(u_0, v_0)$

$$T_{P_0} S = \mathrm{span}\langle P_u|_{\underline{u}_0},\, P_v|_{\underline{u}_0} \rangle$$

- Il piano affine $\subseteq \mathbb{R}^3$ passante per P_0 e parallelo a $T_P S$ e' detto <u>PIANO TANGENTE a S in P_0</u> ed e' denotato con $T_{P_0}(S, P_0)$

L'EQUAZIONE di $T_{P_0}(S, P_0)$ e', posto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{\underline{u}_0} & \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{\underline{u}_0} & \left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{\underline{u}_0} \\ \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{\underline{u}_0} & \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{\underline{u}_0} & \left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{v_0} \end{vmatrix} = 0$$

Il VERSORE $N_{\underline{u}_0} = \dfrac{P_u|_{\underline{u}_0} \wedge P_v|_{\underline{v}_0}}{\| P_u|_{\underline{u}_0} \wedge P_v|_{\underline{v}_0} \|}$ e' detto VERSORE NORMALE a S in P_0

(e' il VERSORE ortogonale al piano tangente affine $T_{P_0}(S, P_0)$)

ESEMPIO grafico di una funzione

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad C^\infty \quad V = \mathbb{R}^2$

$\underline{P} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \longrightarrow (u, v, f(u, v))$

$\underline{P}(u)$ e' INIETTIVA e C^∞

$$J(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{ha rango massimo}$$

È UN FOGLIO SEMPLICE

Il piano tangente affine a $S = P(\mathbb{R}^2)$ in $P_0 = (u_0, v_0, f(u_0, v_0))$

$f(u_0, v_0) = z_0$

$$\begin{vmatrix} x - u_0 & y - v_0 & z - f(u_0, v_0) \\ 1 & 0 & \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right| \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

$$z - z_0 - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial u} - (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO del PIANO TANGENTE

Sia $\underline{P} : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie elementare e $S = \underline{P}(V)$. Sia $\gamma : J \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^2$ una CURVA di classe C^∞ definita su $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, semplice (cioe' iniettiva) e regolare ($\dot{\gamma} \neq 0$)

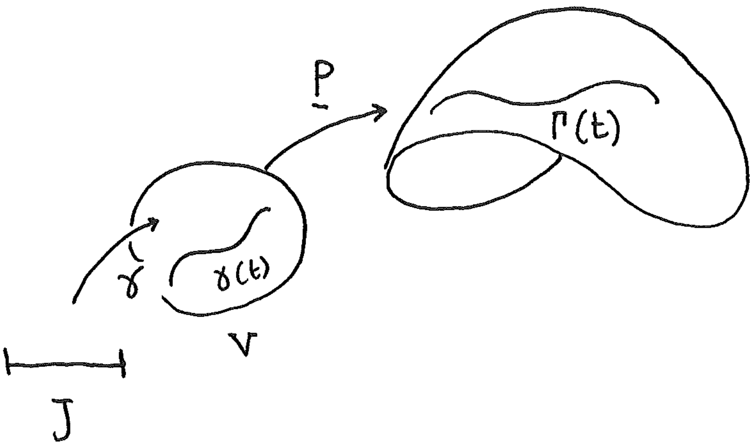
$$J \xrightarrow{\ \gamma\ } V \xrightarrow{\ \underline{P}\ } \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto (u,v) \longmapsto \underline{P}(u,v)$$

la composizione $\Gamma = \underline{P} \circ \gamma$ e' C^∞ e Iniettiva

$$\Gamma(t) = \underline{P}(u(t), v(t))$$

$$\dot{\Gamma}(t) = \underline{P}_u \dot{u} + \underline{P}_v \dot{v}$$



$$\left.\begin{array}{l} (\dot{u}, \dot{v}) = \dot{\gamma} \neq 0 \\ \underline{P}_u \text{ e } \underline{P}_v \text{ sono l. i.} \end{array}\right) \Rightarrow \dot{\Gamma} \neq 0 \quad \forall t$$

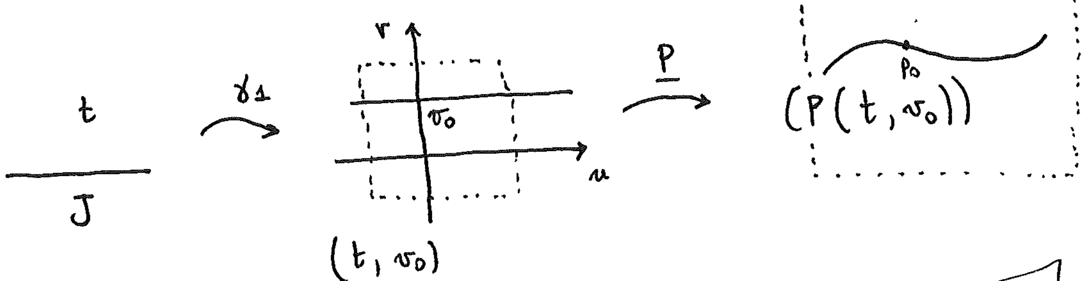
$\Gamma(t)$ e' REGOLARE
SEMPLICE
C^∞

Il vettore tangente a $\Gamma(t)$ in $\Gamma(t_0)$ e' combinazione Lineare di $\underline{P}_u(u(t_0), v(t_0))$ e $\underline{P}_v(u(t_0), v(t_0)) \Rightarrow$ la retta tangente a $\Gamma(t)$ in $p_0 = \Gamma(t_0) \subseteq T_{p_0}(S, p_0)$ piano tangente affine a S in p_0

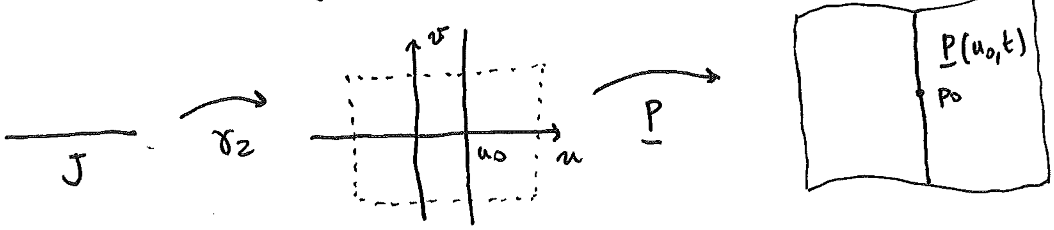
→ Il PIANO TANGENTE e' il Luogo delle rette tangenti alle curve tracciate sulla superficie e passanti per il punto di tangenza

CURVE COORDINATE

u-curve



V-CURVE



FOGLI SEMPLICI COME PARAMETRIZZAZIONI LOCALI DI SUPERFICIE

Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ un sottoinsieme.

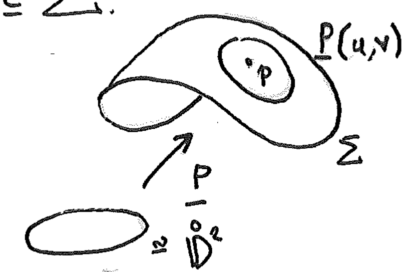
Si dice che Σ e' una superficie differenziabile di $\mathbb{R}^3 \iff \forall\, p \in \Sigma$
$\exists\, V \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad V$ aperto $\cong \mathring{D}^2$ e

$\underline{P} : V \longrightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ foglio semplice di superficie t.c

- $\underline{P}(V)$ e' un intorno aperto di p in Σ
- $\underline{P} : V \longrightarrow P(V)$ e' UN OMEOMORFISMO

quindi

$$\begin{cases} \underline{P} \text{ e' } C^\infty, \text{ iniettiva e di rango max} \\ P : V \approx \underline{P}(V) \quad \text{OMEO con } P(V) \text{ aperto } \subseteq \Sigma . \end{cases}$$



$\underline{P} : V \longrightarrow \Sigma$ e' detta PARAMETRIZZAZIONE LOCALE

$P(V)$ INTORNO COORDINATO

TEOREMA Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie differenziabile e siano

$\underline{P}_\alpha : V_\alpha \longrightarrow \Sigma$
$\underline{P}_\beta : V_\beta \longrightarrow \Sigma$ due parametrizzazioni locali tc $Z = \underline{P}_\alpha(V_\alpha) \cap \underline{P}_\beta(V_\beta) \neq \emptyset$

$$\Longrightarrow P_{\alpha\beta} : P_\beta^{-1} \circ P_\alpha : P_\alpha^{-1}(Z) \longrightarrow P_\beta^{-1}(Z) \text{ e' un } \underline{\text{DIFFEO}}$$

– lo dimostriamo la prossima volta –

CONSEGUENZA : Una superficie differenziabile $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ e' una varieta' diff di dim $= 2$ in cui l'atlante e' dato da

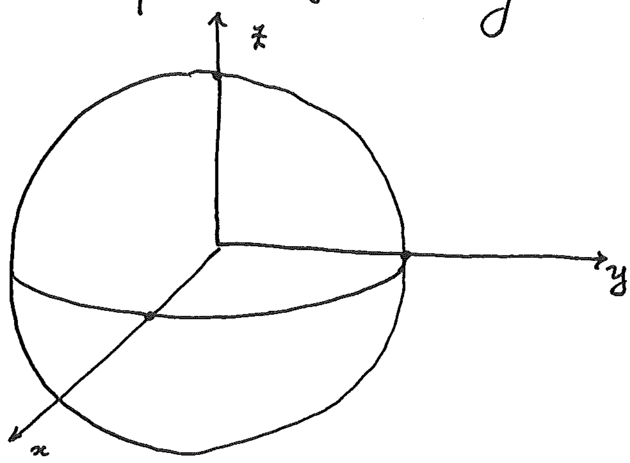
$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \quad \text{con} \quad U_\alpha = P_\alpha(V_\alpha) \quad \text{e} \quad \varphi_\alpha = P_\alpha^{-1}$$

$$U_\alpha \underset{P_\alpha^{-1}}{\approx} V_\alpha \approx \mathring{D}^2 \qquad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = \underline{P}_\beta^{-1} \circ \underline{P}_\alpha \quad C^\infty$$

OSS UN FOGLIO SEMPLICE non e' detto che sia UNA SUPERFICIE DIFFERENZIABILE

ESEMPI:

$S^2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \}$ e' UNA SUPERFICIE DIFF.



$\underline{x}_1(u,v) = (u, v, \sqrt{1-(u^2+v^2)})$ $\qquad u,v \in U \subseteq \mathbb{R}^2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0 \}$

$\underline{x}_1(U) =$  aperto

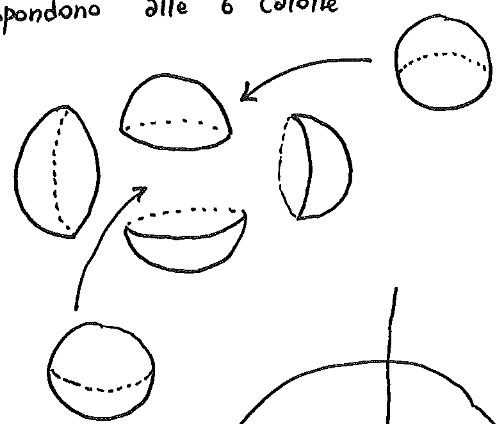
$U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1 \}$

- $\underline{x}_1$ e' C^∞
- $\underline{x}_1$ e' un omeomorfismo

  $\underline{x}_1^{-1}$ e' la proiezione $\qquad (x,y,f(x,y)) \xrightarrow{pr} (x,y)$

- $J(\underline{x}_1)$ ha rango massimo

Per coprire tutta la sfera S^2 ho bisogno di 6 parametrizzazioni locali che corrispondono alle 6 calotte



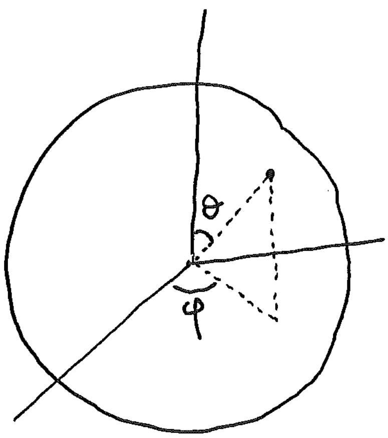
UN'ALTRA PARAMETRIZZAZIONE POSSIBILE

$\underline{x}(\theta,\varphi)$ con $\theta,\varphi \in V$

$0 < \theta < \pi$

$0 < \varphi < 2\pi$

$\underline{x} : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$



$$\begin{cases} x(\theta,\varphi) = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z(\theta,\varphi) = \cos\theta \end{cases}$$

$\underline{x}(V)$ e' $S^2 \setminus C$

C semicerchio che contiene 2 poli

PER COPRIRLA TUTTA BASTANO 2 PAR

↳ DIMOSTRAZIONE del TEOREMA

– cambiamento di carte e' differenziabile –

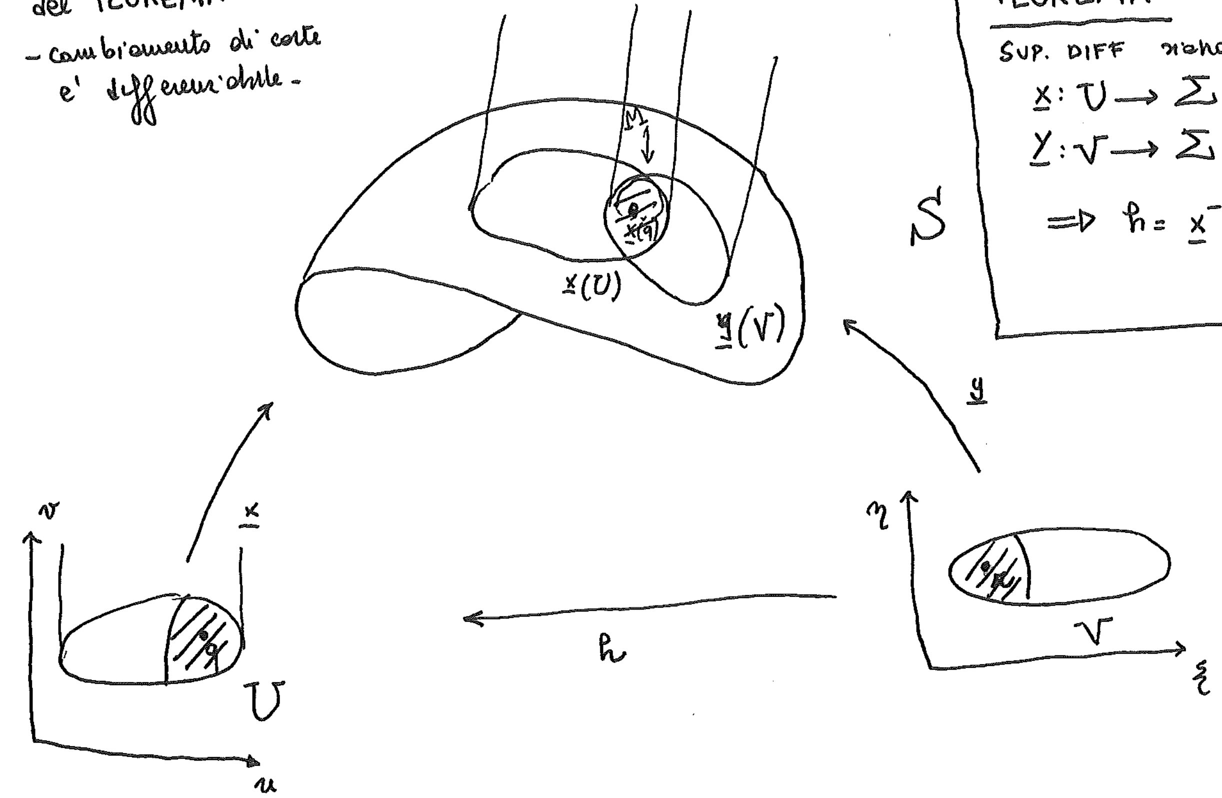
TEOREMA Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ SUP. DIFF siano

$\underline{x}: U \to \Sigma$

$\underline{y}: V \to \Sigma$

$\underline{x}(U) \cap \underline{y}(V) \neq \emptyset$ (con $\underline{x}(U) \cap \underline{y}(V) = Z$)

$\Rightarrow h = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y} : \underline{y}^{-1}(Z) \to \underline{x}^{-1}(Z)$ e' UN DIFFEO



$$x(U) \cap y(V) = W$$

$$y^{-1} \circ \underline{x} : \underline{x}^{-1}(W) \longrightarrow y^{-1}(W) \quad \text{e' un diffeo } C^\infty$$

$$\underline{x}^{-1} \circ \underline{y} : y^{-1}(W) \longrightarrow x^{-1}(W)$$

$$\underline{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

$$\underline{y}(\xi,\eta) = (x(\xi,\eta), y(\xi,\eta), z(\xi,\eta))$$

significa che

h: cambiamento di coordinate

$u = u(\xi,\eta)$

$v = v(\xi,\eta)$

$\xi,\eta \in y^{-1}(W)$

e' C^∞.

- $x^{-1} \circ y$ (= h) e' UN OMEOMORFISMO come composizione di omeomorfismi
- <u>NON POSSIAMO</u> DIRE che h e' diff come composizione perche' non abbiamo ancora definito cosa si intende per appl. diff. su una sup.

Sia $r \in \underline{y}^{-1}(W)$ $\qquad q = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y}\,(r) = h(r) \in x^{-1}(W)$

$\underline{x}(u,v)$ e' una parametrizzazione

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{x}_u \\ \underline{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$ ha rango max in q

supponiamo che $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_q \neq 0$

definiamo F estensione di $\underline{x}$ t.c. $F : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(u,v,t) = (x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)+t)$$

F e' differenziabile e $F\big|_{U\times\{0\}} = \underline{x}$

$$\det dF_q = \begin{vmatrix} x_u & x_v & 0 \\ y_u & y_v & 0 \\ z_u & z_v & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ possiamo applicare il Teorema della funzione Inversa

$\Rightarrow \exists\, M$ intorno di $\underline{x}(q) \in \mathbb{R}^3$ t.c. in M $\exists\, F^{-1}$ ed e' differenziabile *

dal momento che $\underline{y}$ e' continua $\exists\, N$ ar in V t.c. $\underline{y}(N) \subseteq M$

$$h\big|_N = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y}\,\big|_N = \underbrace{F^{-1}}_{\text{diff } *} \circ \underbrace{\underline{y}}_{\text{diff}}\,\big|_N$$

$\Rightarrow h$ e' differenziabile come composizione di mappe differenziabili

e' differenziabile in r

— per l'arbitrarietà di r si ha la tesi —