7 Maggio 2015

- $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ superfici differenziabili

F: $\Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ DIFFEOMORFISMO e' detta isometria se $\forall p \in \Sigma_1$, (indicato con $dF_p : T_p \Sigma_1 \longrightarrow T_{F(p)} \Sigma_2$ IL DIFFERENZIALE), $\forall v_1, v_2 \in T_p \Sigma_1$

$$\boxed{\langle dF_p(v_1), dF_p(v_2) \rangle_{F(p)} = \langle v_1, v_2 \rangle_p} \quad (*)$$

…vero dF conserva le distanze.

Se $\exists$ F siffatta Σ_1 e Σ_2 sono dette ISOMETRICHE GLOBALMENTE.

Se indichiamo con I_1 la prima forma fondamentale di Σ_1 in p e con I_2 la 1ª forma fondamentale in $F(p)$ da $(*)$ segue, ponendo $v_1 = v_2 = v$

…e Σ_2 sono …METRICHE $\Longleftrightarrow$ $\boxed{I_2(dF_p(v)) = I_1(v)}$ $\forall p \in \Sigma_1$

…mo ora Σ_1, Σ_2 sop. diff e sia $p \in \Sigma_1$ e $U_p \subseteq \Sigma_1$ intorno di p

F: $U_p \longrightarrow \Sigma_2$ e' detta ISOMETRIA LOCALE $\Longleftrightarrow$ $\exists$ $\overline{U}_{F(p)} \subseteq \Sigma_2$ tc $F : U_p \longrightarrow \overline{U}_{F(p)}$ e' UN'ISOMETRIA

…1 e Σ_2 sono dette Localmente Isometriche $\Longleftrightarrow$ $\forall p \in \Sigma_1$ $\exists$ U_p e ~~…~~, …ovvero F_{U_p} tc $F_{U_p} : U_p \longrightarrow \Sigma_2$ e' UN'ISOMETRIA LOCALE

Se $\exists$ F: $\Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ DIFFEOMORFISMO che e' un'isometria Locale $\forall p \in \Sigma_1$ allora Σ_1 e Σ_2 sono GLOBALMENTE ISOMETRICHE

Il PIANO e IL CILINDRO

Sia $P_1 : \underbrace{(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}}_{V_1} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad (r,s) \longmapsto (r,s,0)$

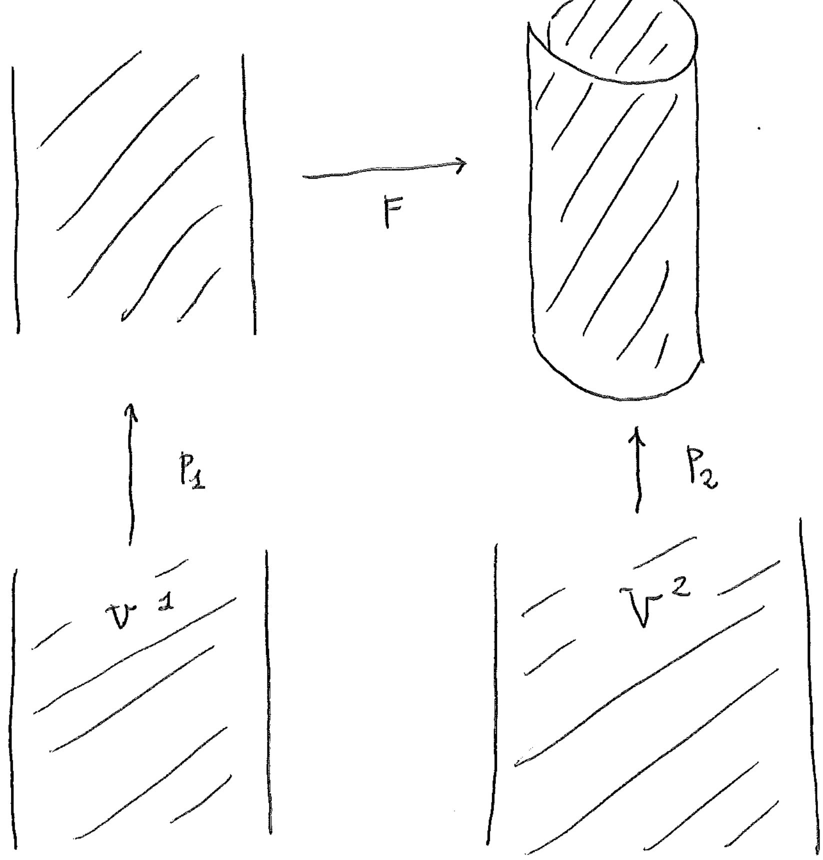
$P_2 : \underbrace{(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}}_{V_2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad (u,v) \longmapsto (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$

$S^1 = P_1(V_1)$ È UNA STRISCIA del piano $z=0$

$S^2 = P_2(V_2)$ e' UN CILINDRO CIRCOLARE RETTO PRIVATO DI UNA RETTA GENERATRICE.

Considero $F : S^1 \longrightarrow S^2$

$(r,s,0) \longmapsto (\cos r, \operatorname{sen} r, s)$



$$\begin{tikzcd}
(r,s,0) \arrow[r, mapsto, "F"] & (\cos r, \operatorname{sen} r, s) \\
(r,s) \arrow[u] & (r,s) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$P_2^{-1} \circ F \circ P_1 \ (r,s) = (r,s)$

L'espressione locale di F e'

$$P_2^{-1} \circ F \circ P_1 (r,s) = (r,s) \implies P_2^{-1} \circ F \circ P_1 = id$$

F e' UN DIFFEOMORFISMO (l'espressione locale e' l'identita') e $dF = Id$.

$$P_{1r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_{1s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_{2u} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_{2v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice della I° FORMA di S_1 I_1

matrice della I° forma di S_2 I_2

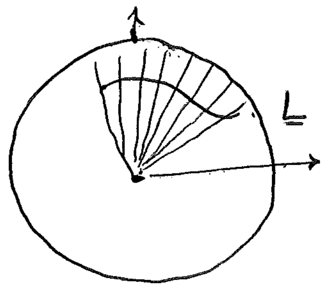
$\underline{v}$ $\quad dF(\underline{v}) = \underline{v}$ $\qquad I_1(\underline{v}) = I_2(dF(\underline{v})) = I_2(\underline{v})$

$\implies F$ E' UN'ISOMETRIA LOCALE fra cilindro e piano

(poiche' ho costruito F solo su di una parametrizzazione)

ESEMPIO 2

Sia $\underline{L} : J \to S^2$ una CURVA C^∞ semplice regolare, parametrizzata mediante ascissa curvilinea



$V_1 = J \times \mathbb{R}^+ \qquad \underline{P}_1 : V_1 \to \mathbb{R}^3$

$(s,t) \longmapsto t \cdot \underline{L}(s)$

$P_1(V_1)$ E' UN MEZZO CONO PRIVATO del vertice

$V_2 = \mathbb{R}^2 \qquad \underline{P}_2 : V_2 \to \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto (u,v,0)$

PIANO

Si puo' anche in questo caso dimostrare che

$F : P_1(V_1) \longrightarrow P_2(V_2)$

$p \longmapsto (t\cos s, t\sin s, 0)$ e' UN'ISOMETRIA LOCALE TRA CONO PRIVATO DI UN PUNTO E PIANO

ES: Il cilindro e il piano sono LOCALMENTE ISOMETRICI ma non globalmente
se lo fossero $\exists$ F diffeo : Cilindro $\to \Pi$ piano ma $\pi_1(\text{Cilindro}) = \mathbb{Z}$
e $\pi_1(\Pi) = \mathbb{1}$. (Assurdo).

→ E' chiaro che se $\varphi: \Sigma^1 \to \Sigma^2$ e' un diffeomorfismo e un'ISOMETRIA LOCALE $\forall p \in \Sigma_1$ allora e' un'ISOMETRIA GLOBALE.

PROPOSIZIONE (senza dimostrazione) Supponiamo che $\exists$ due parametrizzazioni $P_1: U_1 \to \Sigma_1$ e $P_2: U_2 \to \Sigma_2$ tc $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$ in U_1. Allora la mappa $\varphi = P_2 \circ P_1^{-1}$ e' un'ISOMETRIA LOCALE fra $P_1(U_1)$ e Σ_2.

ESEMPIO 3 L'ELICOIDE E IL CATENOIDE SONO LOCALMENTE ISOMETRICI.

- La superficie di rotazione della catenaria $\begin{cases} x = a\cosh v \\ z = av \end{cases}$ $-\infty < v < \infty$

e' data da $0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$

$$\underline{x}(u,v) = (a\cosh v \cos u,\ a\cosh v \operatorname{sen} u,\ av)$$

$$E = a^2\cosh^2 v \qquad F = 0 \qquad G = a^2(1+\sinh^2 v) = a^2\cosh^2 v$$

QUESTA SUPERFICIE È DETTA CATENOIDE

- Una parametrizzazione dell'Elicoide e' data da

$$\bar{\underline{x}}(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{v}\cos\bar{u},\ \bar{v}\operatorname{sen}\bar{u},\ a\bar{u}) \qquad 0 < \bar{u} < 2\pi \qquad -\infty < \bar{v} < \infty$$

FACCIAMO UN CAMBIO DI PARAMETRI ponendo $\begin{matrix} u = \bar{u} \\ \bar{v} = a\sinh v \end{matrix}$ e' Iniettiva e se $J\begin{pmatrix}\bar{u},\bar{v}\\ u,v\end{pmatrix} = a\cosh v \neq 0 \quad \forall v$

$\Rightarrow \bar{x}(\bar{u},v) = (a\sinh v\cos u, a\sinh v \operatorname{sen} u, au)$ e' una nuova parametrizzazione dell'elicoide.

$$\bar{E} = a^2\cosh^2 v \qquad \bar{F} = 0 \qquad \bar{G} = a^2\cosh^2 v$$

$E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$ per la proposizione precedente <u>Elicoide e catenoide sono localmente isometrici</u>

<u>OSS</u> : Possiamo dare una definizione "simile" a quella di isometria locale e globale e cioe' quella di MAPPA CONFORME.

<u>Def</u>: Σ^1 e Σ^2 <u>sono conformi</u> se $\exists$ F diffeomorfismo $\Sigma^1 \to \Sigma^2$ t.c. $\forall p \in \Sigma^1$ (sia la I^a forma fondamentale lungo $\underline{v} \in T_pM$ la indichiamo con I_1 e con I_2 quella in $F(p)$ di $dF_p(v)$)

$$I_1(\underline{v}) = \lambda^2(p)\, I_2(dF_p(\underline{v})) \qquad \left(\lambda^2 \text{ funzione } C^\infty \neq 0 \text{ definita su } \Sigma^1\right)$$

- analoghe definizioni e proposizioni -

<u>PROP</u>: (NON DIMOSTRATA) $\exists$ sempre una parametrizzazione di $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ diff t.c. $E = \lambda^2 \quad F = 0 \quad G = \lambda^2$ [<u>PARAMETRIZZAZIONE ISOTERMA</u>]

$\Rightarrow$

<u>COROLLARIO</u> tutte le superfici sono fra loro localmente conformi

Infatti per ciascuna prendo una parametrizzazione isoterma $\Rightarrow$ ciascuna e' loc. conforme al piano.

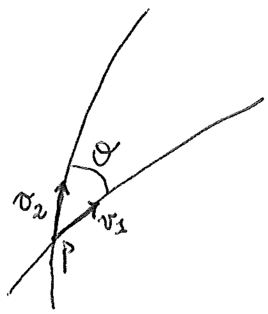
- Le lunghezze di curve su di una superficie si esprimono solo tramite i coefficienti della 1ª forma fondamentale

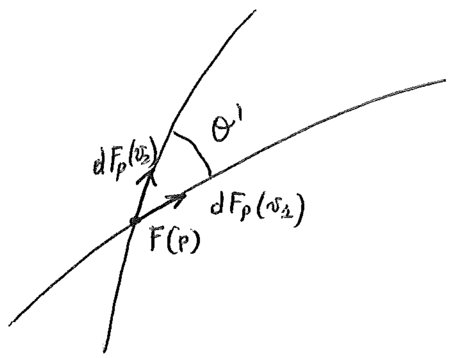
$\Rightarrow$ Se F e' un'ISOMETRIA conserva le lunghezze.

- Se F e' una mappa conforme conserva gli angoli infatti

$$< dF_p(v_1), dF_p(v_2) >_{F(p)} = \lambda^2 < v_1, v_2 >_p$$

$$\cos\theta = \frac{< v_1, v_2 >}{\|v_1\| \, \|v_2\|}$$





$$\cos\theta' = \frac{< dF_p(v_1), dF_p(v_2) >}{\|dF_p(v_1)\| \, \|dF_p(v_2)\|} = \frac{\cancel{\lambda^2} < v_1, v_2 >}{\cancel{\lambda}\|v_1\| \, \cancel{\lambda}\|v_2\|} = \cos\theta$$

$$\boxed{\theta = \theta'}$$

$\longrightarrow$ LE MAPPE conformi conservano gli angoli.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA della CURVATURA di GAUSS

In aggiunta a Lez 7 e 8
7/8 Maggio

Ricordiamo questa interpretazione della curvatura K di Gauss di una superficie Σ in un punto p, che e' poi il modo in cui Gauss l'ha originariamente introdotta.

Per farlo abbiamo bisogno di una definizione.

Siano Σ e $\overline{\Sigma}$ due superfici <u>ORIENTATE</u>

Sia $\varphi : \Sigma \longrightarrow \overline{\Sigma}$ un'applicazione DIFFERENZIABILE

Sia $p \in \Sigma$ e $d\varphi_p$ il differenziale (che assumiamo sia non singolare in p)

- diciamo che φ <u>PRESERVA L'ORIENTAZIONE</u> in p $\Longleftrightarrow$ data una base positiva $\{w_1, w_2\}$ di $T_p\Sigma$ $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ E' UNA BASE POSITIVA di $T_{\varphi(p)}\overline{\Sigma}$

- Se $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ NON e' positiva allora si dice che φ INVERTE ORIENTAZIONE

Se consideriamo $\underline{N}: \Sigma \longrightarrow S^2$, Σ e $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ un'orientazione su Σ, $\underline{N}$ induce un'orientazione su S^2 ancora data da $\underline{N}$.

Sia p un punto di Σ in cui $d\underline{N}_p$ e' NON SINGOLARE

Sia $\{w_1, w_2\}$ base di $T_p\Sigma$

$$d\underline{N}_p(w_1) \wedge d\underline{N}_p(w_2) = d\underline{N}_p(P_u \dot{u}_1 + P_v \dot{v}_1) \wedge d\underline{N}_p(P_u \dot{u}_2 + P_v \dot{v}_2) =$$

$$= \left(d\underline{N}_p(P_u)\dot{u}_1 + d\underline{N}_p(P_v)\dot{v}_1\right) \wedge d\underline{N}_p(P_u)\dot{u}_2 + d\underline{N}_p(P_v)\dot{v}_2 =$$

$$= \left((a_{11}P_u + a_{21}P_v)\dot{u}_1 + (a_{21}P_u + a_{22}P_v)\dot{v}_1\right) \wedge (a_{11}P_u + a_{21}P_v)\dot{u}_2 + (a_{21}P_u + a_{21}P_v)\dot{v}_2)$$

$$= \det \underline{N}_p \cdot w_1 \wedge w_2 = K\, w_1 \wedge w_2$$

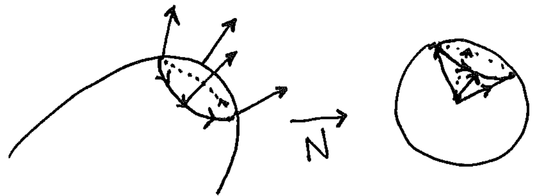
$=$ per $w_1 = \underline{P}_u$ $w_2 = \underline{P}_v$

$$\underline{N}_u \wedge \underline{N}_v = (a_{11}\underline{P}_u + a_{21}\underline{P}_v) \wedge (a_{12}\underline{P}_u + a_{22}\underline{P}_v) =$$

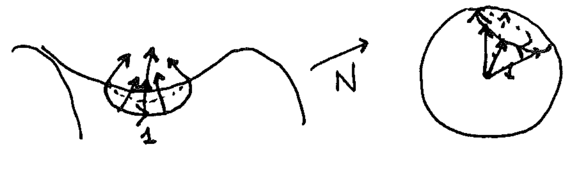
$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, \underline{P}_u \wedge \underline{P}_v = K\, \underline{P}_u \wedge \underline{P}_v$$

$\Longrightarrow$ LA MAPPA di GAUSS preserva l'orientazione in p se $K(p) > 0$

LA MAPPA di GAUSS inverte l'orientazione in p se $K(p) < 0$

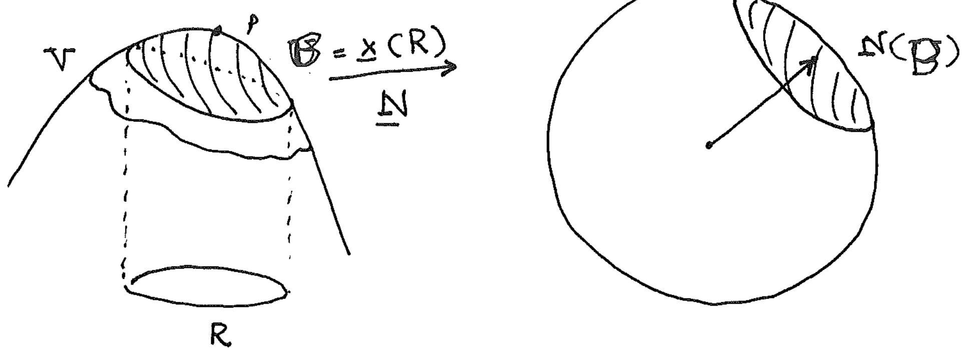


PRESERVA il VERSO



Inverte il VERSO di percorr.

Per tener conto di questo fatto, fissiamo come convenzione che L'AREA di una REGIONE contenuta in un intorno coordinato V, ove $K \neq 0$ e l'area della sua immagine tramite $\underline{N}$ hanno lo stesso segno se $K > 0$ o segno opposto se $K < 0$



<u>PROPOSIZIONE</u> Sia $p \in \Sigma$ in cui $K \neq 0$ e sia V un intorno coordinato connesso di p dove K NON CAMBIA SEGNO.

Allora $$K(p) = \lim_{A \to 0} \frac{A'}{A}$$

dove A e' l'area della regione $B \subseteq V$ che contiene p e A' e' l'area della sua immagine tramite la mappa di Gauss, $\underline{N}(B)$ e il limite viene preso su di una serie di regioni $B_n \to p$, nel senso che ogni sfera intorno a p contiene tutti i B_n per n sufficientemente grande.

<u>dim</u> $A = \int_R |P_u \wedge P_v| \, du\, dv$ e' l'area di B

A' area di $N(B)$ e' $\int_R |N_u \wedge N_v| \, du\, dv$

usando la convenzione sull'area e $N_u \wedge N_v = K(P_u \wedge P_v)$

$$A' = \int_R K |P_u \wedge P_v| \, du\, dv = \boxed{\text{Area con segno di } N(B)}$$

<u>Teorema della media integrale</u> se f continua e limitata su D connesso

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad \int_D f(u,v)\, du\, dv = f(P_0)\, \text{Area}(D)$ per un $P_0 \in D$

$\Longrightarrow$ $A' = K(P')|P_u \wedge P_v|(P')\ \text{Area } R$ $\qquad A = |P_u \wedge P_v|(P'')\ \text{Area } R$

$$\boxed{\lim_{B \to P} \frac{\text{Area } R}{\text{Area } R} \cdot \frac{K(P')|P_u \wedge P_v|(P')}{|P_u \wedge P_v|(P'')} = K(P)}$$