IL TEOREMA EGREGIUM DI GAUSS

LEZ 8

– RIMANDO ALLA LEZIONE IN CUI SI DICE COME GAUSS HA INTRODOTTO K –

La curvatura di GAUSS e' stata introdotta e pensata usando il versore normale alla superficie.

LA COSA SORPRENDENTE – e che dimostra il Teorema Egregium – e' che in realtà K dipende SOLO dai coefficienti della 1ª FORMA FONDAMENTALE.

$\underline{P}: V \to \mathbb{R}^3$ PARAMETRIZZAZIONE LOCALE di Σ $\qquad S = \underline{P}(V)$

In ogni punto $p \in S$ si può considerare come riferimento locale (NON ORT) di $\mathbb{R}^3$ $(\underline{P}_u, \underline{P}_v, \underline{N})$, anche i vettori derivati si potranno scrivere come c.l. di questi.

$$\underline{P}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \underline{P}_u + \Gamma_{11}^2 \underline{P}_v + L_1 \underline{N}$$
$$\underline{P}_{uv} = \Gamma_{12}^1 P_u + \Gamma_{12}^2 P_v + L_2 \underline{N}$$
$$\underline{P}_{vv} = \Gamma_{22}^1 P_u + \Gamma_{22}^2 P_v + L_3 \underline{N}$$
$$\underline{P}_{vu} = \Gamma_{21}^1 P_u + \Gamma_{21}^2 \underline{P}_v + \overline{L}_2 N$$
$$N_u = a_{11} \underline{P}_u + a_{21} \underline{P}_v$$
$$N_v = a_{12} \underline{P}_u + a_{22} \underline{P}_v$$

Γ_{ij}^k sono detti simboli di Christoffel nella parametrizzazione $\underline{P}$

visto che $P_{uv} = P_{vu}$

$\Rightarrow \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$
$\qquad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$

- moltiplichiamo le prime 4 equazioni per $\underline{N}$

$e = P_{uu} \cdot N = L_1$ ecc ... $\qquad L_1 = e \qquad L_2 = \overline{L}_2 = f \qquad L_3 = g$ $\qquad$ COEFF della $\underline{II}^a$ forma

vogliamo trovare l'espressione dei simboli di Christoffel.

- moltiplichiamo le prime 4 equazioni per $\underline{P}_u$ e $\underline{P}_v$

$$\begin{cases} \langle P_{uu}, P_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \langle P_{uu}, P_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle P_{uv}, P_u \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \langle P_{uv}, P_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle P_{vv}, P_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \langle P_{vv}, P_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

NOTATE che $EG - F^2 \neq 0$

$\Rightarrow$ si possono risolvere i 3 sistemi e si trovano i termini di Christoffels in termini di E, F, G e derivate di E, F, G.

$\rightarrow$ TUTTI I CONCETTI GEOMETRICI CHE POSSONO ESSERE ESPRESSI TRAMITE I SIMBOLI DI CHRISTOFFEL SONO DIPENDENTI SOLO DALLA I° FORMA FONDAMENTALE E SONO QUINDI <u>INVARIANTI PER ISOMETRIE</u>

Abbiamo visto che P_{uu}, P_{uv}, dipendono solo dai coeff. della 1° forma e della 2° forma.

Sappiamo inoltre che

$$(P_{uu})_v - (P_{uv})_u = 0$$

$$(P_{vv})_u - (P_{vu})_v = 0 \qquad \star$$

$$N_{uv} - N_{vu} = 0$$

scriviamo l'espressione di P_{uu}, P_{uv}, ecc... in $\star$, visto che dipendono solo da E, F, G, e, f, g posso scrivere come

$$A_1 \underline{P_u} + B_1 \underline{P_v} + C_1 \underline{N} = 0$$

$$A_2 \underline{P_u} + B_2 \underline{P_v} + C_2 \underline{N} = 0$$

$$A_3 \underline{P_u} + B_3 \underline{P_v} + C_3 \underline{N} = 0$$

dove A_i, B_i, C_i ($i=1\dots3$) dipendono solo da E, F, G, e, f, g e loro derivate.

dal momento che $\underline{P_u}, \underline{P_v}, \underline{N}$ sono l. ind $\Rightarrow$ otteniamo 9 relazioni

$A_i = 0 \quad B_i = 0 \quad C_i = 0 \quad i=1..3$

come esempio otteniamo le relazione $B_1 = 0$ $\left(A_1 = 0 \quad C_1 = 0\right)$

- usando l'espressione di P_{uu} e P_{uv} ■

$$\left(\Gamma_{11}^1 \underline{P_u} + \Gamma_{11}^2 \underline{P_v} + e\underline{N}\right)_v - \left(\Gamma_{12}^1 P_u + \Gamma_{12}^2 P_v + f\underline{N}\right)_u = 0$$

$$\Gamma_{11}^1 P_{uv} + \Gamma_{11}^2 P_{vv} + e N_v + (\Gamma_{11}^1)_v P_u + (\Gamma_{11}^2)_v P_v + e_v N =$$

$$= \Gamma_{12}^1 P_{uu} + \Gamma_{12}^2 P_{vu} + f N_u + (\Gamma_{12}^1)_u P_u + (\Gamma_{12}^2)_u P_v + f_u N$$

usando nuovamente ■

usando nuovamente $B_1 = 0$

e uguagliando i termini in $\underline{X}_v$ si ottiene

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + e\,a_{22} + (\Gamma_{11})^2_v = \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + f a_{21} + (\Gamma^2_{12})_u$$

Introducendo l'espressione di a_{22}, a_{21} segue che.

$$(\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} =$$

$$= -E\,\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -EK$$

abbiamo così trovato che K dipende solo dai coeff delle I° forme e derivate

$\Rightarrow$

<u>TEOREMA EGREGIUM DI GAUSS</u> la CURVATURA di GAUSS di una superficie e' invariante per ISOMETRIE LOCALI.

ponendo a zero il coeff di $\underline{X}_u$ e di $\underline{N}$ si arriva ad altre equazioni - dette Eq di compatibilita' - [che non vediamo in questo CORSO].

Il TEOREMA di GAUSS e' sorprendente anche perche' mette in rilievo come concetti che sono stati introdotti tenendo in maniera essenziale presente la posizione della superficie nello spazio non dipendono in realta' da questa posizione ma solo dalle proprieta' metriche (I° forma fondamentale) della superficie.

CONCETTI che dipendono solo dalla I° forma fond sono detti concetti di <u>geometria INTRINSECA</u> alla sup, poiche' non dipendono dalla posizione della sup. nello spazio.