PRODOTTO VETTORIALE in $\mathbb{R}^3$

13 Mar 20

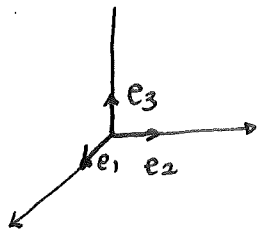
Per prima cosa diciamo cosa si intende quando si dice che due basi ordinate $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ hanno LA STESSA ORIENTAZIONE

def: $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ hanno la stessa orientazione $\iff$ $\det M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(Id) > 0$

⊙ Avere la stessa orientazione è UNA RELAZIONE di equivalenza

In $\mathbb{R}^3$ c'è una base naturale $\underline{e}_1 = (1,0,0)$ $\underline{e}_2 = (0,1,0)$ $\underline{e}_3 = (0,0,1)$

Io dico che $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} = \mathcal{S}$ è ORIENTATA POSITIVAMENTE



Dirò che una base $\mathcal{B}$ è positiva se la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{S}$ ha det pos (ovvero se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{S}$ hanno la stessa orientazione)

fissiamo la base positiva (e_1, e_2, e_3) (a volte la indico con $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$)

Veniamo ora al PRODOTTO VETTORIALE. Siano $u, v \in \mathbb{R}^3$

def

> Il prodotto vettoriale $u \wedge v$ è l'unico vettore t.c
> $\forall w \in \mathbb{R}^3$ $(u \wedge v, w) = \det(u, v, w)$
> ↑ prodotto scalare $= (u \wedge v) \cdot w$

con $\det(u,v,w)$ si intende che se $u = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3$
$v = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3$
$w = w_1 \underline{e}_1 + w_2 \underline{e}_2 + w_3 \underline{e}_3$

allora $$\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = w_1 \underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_{\text{comp. lungo } e_1} - w_2 \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}_{-\text{lungo } e_2} + w_3 \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}_{\text{lungo } e_3}$$

$$\Rightarrow u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \underline{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \underline{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \underline{e}_3 \Rightarrow \boxed{v \wedge v = 0}$$

Si può provare che:

- $u \wedge v = - v \wedge u$
- $u \wedge v$ dipende linearmente da u e v $\left((au + bw) \wedge v = a\, u \wedge v + b\, w \wedge v \right)$

- $u \wedge v = 0 \iff u$ e v sono linearmente dipendenti.
- $(u \wedge v) \cdot u = 0$ e $(u \wedge v) v = 0$ è perpendicolare al piano generato da u e v

OSSERVIAMO INOLTRE

① $(u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = |u \wedge v|^2 > 0$

$\|$ def

$\det(u, v, u \wedge v) \Rightarrow u, v, u \wedge v$ formano una base positiva

② Proviamo inoltre $(u \wedge v) \cdot (x \wedge y) = \begin{vmatrix} u \cdot x & v \cdot x \\ u \cdot y & v \cdot y \end{vmatrix}$

è sufficiente provarlo per linearità sulla base e_1, e_2, e_3

è lineare in x, y, v, u

$$(e_i \wedge e_j) \cdot (e_k \wedge e_\ell) = \begin{vmatrix} e_i e_k & e_j e_k \\ e_i \cdot e_\ell & e_j \cdot e_\ell \end{vmatrix}$$

VERIFICATELO

Voi

$i, j, k, \ell = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix} = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2$$

$\|$

$|u \wedge v|^2$

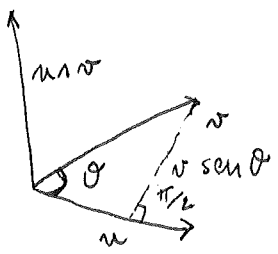
$\|$

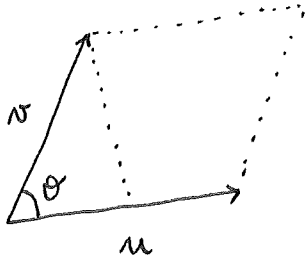
$|u|^2 |v|^2 \cos^2\vartheta$

$= |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2\vartheta)$

$\|$

$\operatorname{sen}^2\vartheta$ $\|$





Area del parallelogramma

$\Rightarrow$ Il prodotto vettoriale di due vettori di $\mathbb{R}^3$ u e v

$u \wedge v$ è UN VETTORE perpendicolare al piano generato da u e v

di NORMA uguale all'area del parallelogramma generato da u e v

DIREZIONE tc $u, v, u \wedge v$ formano una base positiva