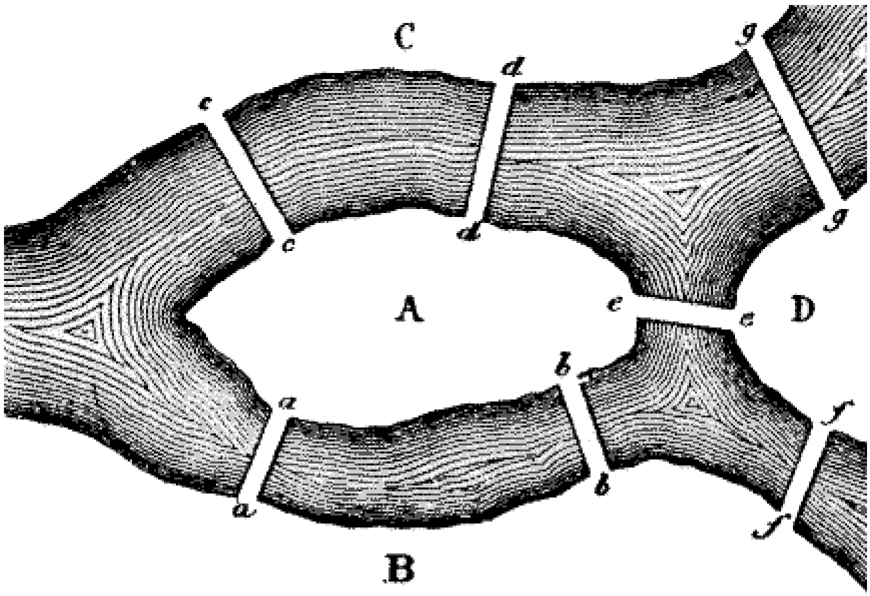
# I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

(Eulero 1735)

La città di Königsberg, situata sul fiume Pregele, comprendeva due isole (A e D in figura), collegate tra loro da un ponte. Un'isola (D) era collegata a ognuna delle due rive (B e C) da un ponte, mentre l'altra isola (A) aveva due ponti verso ogni riva.

I cittadini di Königsberg si posero il seguente problema: è possibile trovare un tragitto tale che, partendo da una qualunque zona della città, consenta di attraversare ciascun ponte una ed una sola volta (ed eventualmente tornare al punto di partenza)?

Se sì, disegnatelo, altrimenti spiegate perché non può esistere.



# I TREDICI PONTI DI PARIGI

Un analogo problema si può porre con i ponti di Parigi, congiungenti le due isole (di Notre Dame e di St.Luois), collegate tra loro da un ponte. L'isola di Notre Dame è collegata a una riva da quattro ponti, e all'altra riva da cinque ponti, mentre l'isola di St. Louis ha due ponti verso un a riva e uno verso l'altra.

È possibile trovare un tragitto tale che, partendo da una qualunque zona della città, consenta di attraversare ciascun ponte una ed una sola volta e tornare al punto di partenza?

Se sì, disegnatelo, altrimenti spiegate perché non può esistere.

Prima di formalizzare le soluzioni che avete discusso, vogliamo cercare di capire quali sono le caratteristiche del problema che "contano". Provate a schematizzarlo in modo da eliminare tutto quello che c'è di "superfluo". Ad esempio, è importante la lunghezza dei ponti? La superficie delle isole? E in che modo si potrebbero rappresentare queste isole e questi ponti? Che "oggetto geometrico" si ottiene?

Provate quindi a rispondere alle domande seguenti:

1) Riscrivete i testi dei due problemi precedenti utilizzando solo: punti (che chiameremo vertici) e linee congiungenti i punti (che chiameremo spigoli), aiutandovi con un disegno.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2) Provate, quindi, a scrivere una definizione di questi "oggetti" geometrici, che d'ora in poi chiameremo **GRAFI**.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3) Quali sono le differenze tra il *grafo* che rappresenta il problema dei ponti di Konigsberg e quello dei ponti di Parigi ?

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

3) Scrivete quindi quale condizione deve soddisfare un grafo perché soddisfi la richiesta espressa per il problema dell'attraversamento dei ponti. (chiameremo questo grafi *euleriani*)

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

4) Proponete un Teorema che garantisca quando un grafo è *euleriano:*

Un grafo è euleriano se e solo se……………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

OPPURE (al posto delle ultime due domande)

Provate a estendere ciò che avete discusso in maniera tale da elaborare una strategia che permetta di prevedere se un grafo

ha un "ciclo di Eulero", cioè se è possibile trovare un cammino che percorra tutti gli spigoli del grafo una ed una sola volta ritornando al punto di partenza

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

ha una "linea di Eulero", cioè una cammino che parte da un vertice A e arriva in un altro vertice B percorrendo una volta sola tutti gli spigoli del grafo (*ricorderete, forse, il gioco che si faceva da bambini della "casetta" o della "busta aperta", nel quale si doveva disegnare un grafo "a forma di casetta" con un tratto continuo, senza ripetizioni e senza staccare la matita dal foglio…*).

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

non è "euleriano", cioè non contiene né un ciclo né una linea di Eulero, come ad esempio nel problema dei sette ponti di Königsberg

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………