



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. ENRIQUES"

Progetto Lauree Scientifiche

Unità operativa di Milano Città Studi

Laboratorio di Giochi Matematici

(responsabile Prof. Stefania De Stefano)

Incontri presso il Liceo - Ginnasio "Parini" di Milano
Anno scolastico 2006/07

7. Relazioni

Nota. Sono:

in box grigi le parti di relazione che si propone di variare, con commenti,
evidenziati in giallo errori o cose poco chiare,
in corsivo le osservazioni fatte da chi ha corretto la relazione,
in blu le proposte di variazione ai testi sottoposti.



Gruppo 1

Incontro N°1- Giochi di scacchiera

GIOCO DEI GRATTACIELI 5

Procediamo etichettando le colonne ~~verticali~~ della griglia da sinistra a destra con le lettere A, B, C, D, E e le ~~colonne orizzontali~~ righe dall'alto in basso con le ~~righe~~ cifre 1, 2, 3, 4, 5.

Commento: a parte la terminologia infelice (le colonne reggono gli edifici e quindi sono verticali, le righe sono quelle su cui scriviamo e quindi sono orizzontali), vorrei sottolineare che **se non si specifica il verso dell'etichettatura** è impossibile decidere che casella descriva ad es. la coppia B4: vedi disegno a lato.

		4				
2						
						2
						2
			5			

Consideriamo la colonna C:
poiché essa ha come etichetta 5, la riempiamo in ordine crescente dal basso.

Ora guardiamo la colonna A:

A1≠30, 40, 50, **10** perché se no non ci sarebbe etichetta 4, → A1=20.

~~Dato che C3=30 → A3≠30,~~

A4≠30 perché non se (?) non ci sarebbe etichetta 4,

C2=40 → A2≠40

quindi A2 =30.

Riga 1: etichetta sx =2 →dato che A2=20 e C1=50, B1=10

Commento: si sta giustificando un risultato corretto con una serie di deduzioni non logiche: il fatto che la colonna A sia dominata dall'etichetta 4 dice che c'è uno ed un solo grattacielo che si nasconde: ma da questa sola indicazione non ho modo di sapere se la sequenza sia 10, 30, **20**, 40, 50 ovvero 10, 30, 40, 50, **20** o 20, 30, 40, 10, 50 o 10, 20, 40, **30**, 50 ecc. Quindi nessuna delle deduzioni marcate in giallo è corretta. Sostituire con questo ragionamento:

Guardiamo la colonna A dall'alto: essendoci l'etichetta 4, in A1 può stare solo il grattacielo da 10 o da 20 piani (altrimenti non sarebbero visibili altri 3 grattacieli).

Guardiamo la riga 1 da sinistra: essendoci l'etichetta 2 e il grattacielo 50 in C1, in A1 deve esserci un grattacielo più alto che in B1.

Dunque A1=20 e B1=10.

Perché sulla colonna A si vedano 4 grattacieli, quello da 30 piani può stare in A2 o in A3: ma sulla stessa riga 3 c'è già un grattacielo da 30 in C3, quindi sta in A2.

Inoltre il grattacielo da 50 piani in colonna A non può stare in A4 (poiché in questo caso in A5 dovrebbe stare il grattacielo nascosto da 10 piani, ma sulla riga 5 c'è già in C5 un grattacielo da 10 piani) né in A3, poiché contravverrebbe all'etichetta 4: dunque sta in A5.

La figura illustra la situazione a questo punto.

		A	B	C	D	E
		4				
1	2	2	1	5		
2		3		4		
3				3		
4				2		2
5		5		1		2
				5		

Etichetta dx fila 5=2 →E5=40 ,perché A5=50.

Etichetta dx fila 4=2→D4 =50.

Poiché la colonna E ha già E5=40, allora per completare la fila 1 →D1=40 e E1=30.

Spiegherei un po' di più; nel ragionamento ci sono delle ellissi anche se non degli errori.



Sulla riga 5 il grattacielo da 50 è in A5, ma l'etichetta dx della riga è 2: quindi i grattacieli sulle colonne B, C, D, devono essere nascosti da quello sulla colonna E.

Dunque in E5 c'è il grattacielo da 40. Ne segue che:

- il grattacielo in E4 non può essere da 40 e neppure da 50, poiché l'etichetta dx della riga 4 è maggiore di 1; anzi, visto che è 2, in D4 deve esserci il grattacielo da 50
- dei due grattacieli da 30 e 40 piani che devono stare sulla prima riga, quello da 30 sta in E1 e quello da 40 in D1.

A lato la raffigurazione dello stato attuale

	A	B	C	D	E	
	4					
1	2	2	1	5	4	3
2		3		4		
3			3			
4			2	5		2
5		5	1		4	2
			5			

Ipotizziamo di assegnare **per tentativo** ad A4 valore 40 → A3=10.

Per completare correttamente l'etichetta dx fila 4 → **E4=10 e B4=30**.

Si procede **analogicamente** completando l'etichetta dx fila 5 con **B5=20 e D5=30**.

Commento:

- 1) assegnare valori per tentativi non ci assicura l'unicità della soluzione; bisognerebbe quanto meno fare l'altro tentativo possibile
- 2) non si capisce perché non vada bene con E4=30 e B4=10
- 3) anche in questo caso non si capisce il motivo della scelta (che infatti è possibile motivare solo dopo diversi altri passaggi). Inoltre l'avverbio giusto è "analogamente": analogico è aggettivo usato (contrapposto a digitale) per denotare tecnologie e strumenti che non facciano uso di una rappresentazione "discreta", ma continua (vedi differenza tra orologio analogico e digitale, registrazioni in analogico – nastri o dischi di vinile – e in digitale – CD)

Riscriviamo:

Guardiamo la casella E4: avendo già sulla colonna E grattacieli da 30 e 40 e sulla riga 4 grattacieli da 20 e 50 piani, in E4 si ha un grattacielo da 10 piani.

Quindi sulla stessa riga, in A4 non ci può essere il grattacielo da 10 piani!

In A4 c'è il grattacielo da 40, in A3 (per completamento della colonna) quello da 10, in B4 (per completamento della riga) quello da 30.

	A	B	C	D	E		
	4						
1	2	2	1	5	4	3	
2		3		4			
3		1	3				
4		4	3	2	5	1	2
5		5	1		4	2	
			5				

Il numero 10 manca solo nella colonna D e secondo le regole del gioco, può stare solo nella casella D2.

Per lo stesso motivo il numero 40 andrà inserito nella casella B3.

Per completare la colonna B osserviamo che il grattacielo da 50 non può stare sulla riga 5, quindi lo inseriremo in B2, mentre in B5 va il grattacielo da 20 e, a completamento della riga 5, in D5 quello da 30.

Per completare la riga 2 inseriremo in E2 un grattacielo da 20 piani.

Infine per completare la ~~riga 3~~ colonna D inseriremo in D3 un grattacielo da 20 piani e infine in E3 quello da 50 mancante.

	A	B	C	D	E		
	4						
1	2	2	1	5	4	3	
2		3	5	4	1		
3		1	4	3			
4		4	3	2	5	1	2
5		5	2	1	3	4	2
			5				

Commento: l'ultima parte va sostanzialmente bene: ho operato correzioni letterarie e ho preferito far riferimento alla colonna D, piuttosto che alla riga 3, perché, essendo la colonna completa tranne che per una posizione, l'inserimento è forzato, mentre nel caso della riga si dovrebbe spiegare perché una scelta invece dell'altra.

**Comunque bravi a venirne a capo e ad annotare le posizioni!
Ma degli altri incontri non ho nessuna relazione!**



Gruppo 2

Incontro N°1 - Giochi di scacchiera

GIOCO DEI GRATTACIELI 2

Su ogni riga e su ogni colonna c'è un solo grattacielo per altezza.
Il nostro compito era quello di riuscire a ricostruire dove potevano essere posizionati i grattacieli rispettivamente da 10, 20, 30, 40 piani a partire dall'etichettatura data alla griglia indicata.

Abbiamo lavorato con delle coordinate per rendere lo svolgimento più agevole

Elenchiamo sotto tutti i passaggi eseguiti

	4	1	3	2	
2					2
3					1
2					2
1					3
	1	2	2	2	

Commento: i passaggi non sono chiari per due motivi:

- 1) non si sa come sono concepite le coordinate (le lettere denotano righe o colonne? Ammesso che denotino colonne, si parte da sinistra o da destra? E i numeri vanno dall'alto al basso o viceversa?)
- 2) date la posizione che intendete riempire ma non il grattacielo con il quale volete riempirlo!
- 3) Poi sarebbe utile visualizzare un po' di strategia; ad esempio:

Denotiamo le righe dall'alto in basso con i numeri da 1 a 4 e le colonne da sinistra a destra con le lettere da A a D.

Alcune etichette sono forzanti: ad esempio 4 indica che i grattacieli devono essere disposti sulla riga (o colonna) corrispondente all'etichetta in ordine dal più piccolo al più grande; 1 indica che il grattacielo più grande deve essere sul bordo dove c'è l'etichetta; 3 indica che il grattacielo più grande non può stare nelle prime due caselle più vicine all'etichetta. Quindi:

etichetta 4 sulla colonna A → grattacielo da 10 in A1, da 20 in A2, da 30 in A3, da 40 in A4

etichetta 1 al lato destro della casella D2 → grattacielo da 40 in D2

etichetta 1 sopra la casella B1 → grattacielo da 40 in B1

etichetta 2 al lato destro della casella C4 → grattacielo da 40 in C3

etichetta 3 sopra la casella C1 → grattacielo da 40 in C3 o C4, ma non in C4 poiché ne esiste già uno in A4 ...

Ma questo è come l'ho trovato io; non so che cosa avete fatto voi. Vi lascio i grafici per aggiustare il ragionamento

	4	1	3	2	
2	.	⋮			2
3	:			⋮	1
2	⋮		⋮		2
1	⋮				3
	1	2	2	2	

D4

B3

C3 → completamento della casella in grigio

A1 → completamento della casella in grigio

C2 → numeri nella griglia

B2 (Né grattacielo da 30 né da 10)

A2

B2

B4

Posizionando gli ultimi 4 grattacieli ci siamo accorti di aver commesso un errore.

Individuato l'errore, abbiamo corretto e completato la griglia con A3 e A2 per esclusione, arrivando così alla soluzione finale.

	4	1	3	2	
2	.	⋮	:	⋮	2
3	:	.	⋮	⋮	1
2	⋮	:	⋮	.	2
1	⋮	⋮	.	:	3
	1	2	2	2	

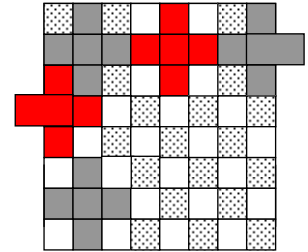


CROCI GRECHE

Siamo riusciti a sistemare in una scacchiera quadrata 8 per 8 al massimo 8 croci greche formate dall'accostamento di 5 quadrati di ~~dimensione lato~~ **dimensione lato** identico **a quello delle** celle della scacchiera.

Con l'aiuto di Tiziana siamo riusciti a capire anche perché 8 fosse il numero massimo di croci:

posizionando le 8 croci greche che occupano ~~50~~ **40** celle della scacchiera su 64 si ottiene la differenza di 24 celle delle quali **almeno** 20 occupano il perimetro della scacchiera: **infatti appoggiando più di due croci greche al bordo della scacchiera un braccio "sporge" da uno dei lati della scacchiera stessa (vedi figura)**; le rimanenti 4 celle non sono sufficienti per poter posizionare la nona croce greca, **essendo questa composta** (~~infatti sono composte~~ da 5 quadrati).





Incontro N°2 - Giochi con le Scelte

0. (COMPLEANNI)

Tra tutte le persone elencate sui nostri foglietti con la loro data di nascita almeno 2 compivano gli anni nello stesso giorno: la professoressa ha vinto la scommessa ...

Commento: Sì, ma perché? Vedi il gioco 3.

1. (ELENCHI)

Posso elencare in 24 modi differenti i 4 gusti (panna, tartufo, caffè, malaga) del mio gelato.

Prendendo come primo gusto panna ci sono 6 modi, come si evince da questa tabella (da leggere in verticale):

P	P	P	P	P	P
T	C	M	M	T	C
C	M	T	C	M	T
M	T	C	T	C	M

Abbiamo proceduto allo stesso modo per gli altri gusti (**M, T, C**), per arrivare a e abbiamo dedotto che in totale i modi sono 24.

2. (CAMELLE)

100 = numero caramelle di cui:

- 28 alla fragola (F)
- 20 alla menta (ME)
- 12 al limone (LM)
- 20 all'arancia (A)
- 10 al miele (ML)
- 10 alla liquirizia (LQ)

Per essere sicuri di estrarre al buio almeno 15 caramelle dello stesso gusto, bisogna pescarne 75. Abbiamo sommato le caramelle in numero inferiore a 15 (LM, ML, LQ): sono in tutto 32.

Poi abbiamo considerato quelle in numero superiore a 15 (F, ME, A); ne potrei pescare 14 di ogni per tipo ~~+1 per~~ senza arrivare ad avere 15 caramelle di ugual tipo come richiesto.

Così ~~la somma diventa 75~~ $(32+42)+1=75$ è il minimo numero di caramelle che basta estrarre per essere sicuri di aver 15 caramelle di ugual tipo.

3. (GIOCHI DI RUOLO)

A seconda delle persone che partecipano al gioco, si possono inventare le date dei compleanni in questo modo:

- 2 persone : 365×365
- 3 persone : $365 \times 365 \times 365$
- 4 persone : $365 \times 365 \times 365 \times 365$
- Ecc.

Se vogliamo evitare di scrivere la stessa data di compleanno, i modi saranno i seguenti:

- 2 persone : $365 \times (365 - 1)$
- 3 persone : $365 \times (365 - 1) \times (365 - 2)$
- 4 persone : $365 \times (365 - 1) \times (365 - 2) \times (365 - 3)$
- Ecc.

Commento: Questo gioco ha qualche cosa a che vedere con quello dei compleanni visto all'inizio? È importante stabilire dei collegamenti!



3bis. (TOTOCALCIO)

Per essere certo di fare 14 al totocalcio dovrei giocare un minimo di (?)

Commento: Purtroppo il file che mi è arrivato doveva essere danneggiato, per cui mancava la conclusione. Me la mandate?

Incontro N°3: Giochi Logici

5. (**ALTERNANZE**) Paolo è un tipo strano: in ogni singolo giorno o mente sempre o dice sempre la verità, alternando il suo comportamento al variare dei giorni. Oggi egli ha fatto 4 delle seguenti 5 affermazioni. Quale non può avere fatto?

- A) Il numero dei miei amici (maschi e femmine) è un numero primo.
- B) I miei amici sono tanti quante le mie amiche.
- C) Io mi chiamo Paolo.
- D) Io dico la verità in tutti i giorni della mia vita.
- E) Tra i miei amici e le mie amiche, tre sono più vecchi di me.

SOLUZIONE

La risposta al quesito è C **in quanto unico elemento certo della descrizione.**

Commento: l'affermazione C è vera, ma **non per questo è la risposta al problema.** Infatti in questo gioco non si chiede di trovare quali affermazioni sono vere o false bensì quali sono coerenti con la giornata vissuta da Paolo: finché non si è stabilito che Paolo è in giornata bugiarda non si può essere sicuri che Paolo non possa aver fatto l'affermazione A.

MOTIVAZIONI LOGICHE

AFFERMAZIONE A) Fornisce come dato che il numero dei suoi amici è primo.

Prendendo in esame l'affermazione B) scopriamo che ciò è falso, poiché nessun numero primo è divisibile per due eccetto il due stesso

Commento: in realtà qui non avete ancora la certezza di un falso. Potete solo dire: **Associata all'affermazione B), quest'affermazione implica che Paolo ha 2 amici, poiché 2 è l'unico numero primo pari**

AFFERMAZIONE B) Dice che il numero dei suoi amici è pari a quello delle sue amiche **ma ciò è falso** poiché i suoi amici sono un numero primo **sconosciuto.**

Commento: vedi commento all'affermazione precedente. Inoltre allo stato attuale il numero primo è noto: vale 2

AFFERMAZIONE D) È falsa poiché il Paolo dice la verità alternando il proprio comportamento al variare dei giorni

AFFERMAZIONE E) È falsa poiché **se i suoi amici sono soltanto due** come supposto in precedenza non può averne tre maggiori di lui.

Commento: Potrebbe anche essere vera; non sappiamo se è vero che Paolo ha due soli amici. Certo non è coerente con A) e B): ed è questo che dice che Paolo è in giornata bugiarda!

Ricapitolando:

L'affermazione A) associata all'affermazione B), implica che Paolo ha 2 amici, poiché 2 è l'unico numero primo pari. Ciò è in contraddizione con l'affermazione E) e quindi Paolo, essendo in giornata bugiarda, può aver fatto l'affermazione D) – che è falsa – ma non la C) che è vera.

Apprezzo la puntualità con cui avete mandato le relazioni ed anche il fatto che avete svolto più lavoro di quanto richiesto, facendo una relazione su ogni gioco.



Gruppo 3

Incontro N°3: Giochi Logici

GIOCO DELLE DUE PORTE

La domanda da porre è:

"Se tu fossi il tuo collega, quale porta mi indicheresti, se ti chiedessi di indicarmi la porta della vita?"

Con questa domanda, il guardiano che dice sempre la verità è costretto a indicarmi la porta della morte; mentre il suo collega, che mente sempre, per logica mi indica la porta della morte. Ora con certezza so che la porta da scegliere è l'altra. Dopo aver ragionato per oltre mezz'ora sulla domanda con i miei compagni di squadra, ipotizzando varie possibilità, ma comunque senza arrivare alla soluzione, abbiamo preso in considerazione l'unico aiuto fornitoci: "ragionate con la doppia negazione". Solo dopo altri dieci minuti di ragionamento, sono giunto alla soluzione.

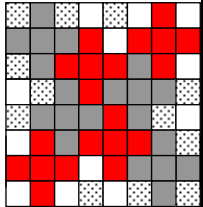
Commento: va bene, ma dove sono le relazioni degli altri due incontri?



Gruppo 4

Incontro N°1 - Giochi di scacchiera

GIOCO DELLE CROCI GRECHE

Ipotesi:	Le caselle della scacchiera sono 64 Ogni croce occupa 5 caselle Le croci non possono sovrapporsi
Tesi:	Il massimo delle croci che si possono porre sulla scacchiera è 8
Dimostrazione:	<p>1. Si osserva che, a causa della forma delle croci, su ogni bordo possono essere occupate massimo 2 caselle. Dunque rimangono in ogni caso scoperte 20 caselle ai bordi *. Dunque $64 - 20 = 44 : 5 = 8,80$. Dunque il massimo delle croci piazzabili è 8.</p> <p><i>Commento:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • le due uguaglianze accostate danno un risultato falso ($64 - 20$ non è uguale a $8,80$). • Inoltre, essendo le croci oggetti che non si "frazionano", scrivere $44 : 5 = 8,80$ è improprio; se dovete ripartire 44 ragazzi su 5 barche non direste che fate salire 8,8 ragazzi su ogni barca! • Quel che avete provato a questo punto non è che "il massimo è 8" bensì che "non si può sperare di riuscire a mettercene più di 8" <p><i>Sostituire:</i> Le caselle utilizzabili sono quindi al massimo $64 - 20$. Ora il quoziente della divisione di 44 per 5 è 8 (con resto 4) per cui sulla scacchiera non si possono porre 9 o più croci. Per mostrare che si possono porre effettivamente 8 croci basta esibire un esempio (vedi a lato).</p>  <p>2. Un altro tipo di risoluzione che ci è venuto in mente è il seguente. Abbiamo osservato che ogni croce occupa 5 caselle ma rende inagibili 8 caselle**. Dunque 64 (caselle complessive) : 8 (caselle occupate da ogni croce) = 8 Dunque il massimo delle croci posizionabili è 8. <i>Commento: questo secondo metodo non mi sembra limpido anche se forse nasce proprio dall'esperienza della costruzione dell'esempio con 8 croci. Presuppone di procedere a considerare le croci in un ordine ben preciso (ad esempio TOP DOWN). In realtà, nel disegno che ho riportato qui, ogni croce che non sia una croce d'angolo rende definitivamente inagibile una sola delle caselle del quadrato in cui è inscritta.</i></p>
Osservazioni:	<p>* Il numero delle caselle scoperte può variare di 1 o 2 in più a seconda della disposizione delle croci.</p> <p>** in realtà $9 - 1$ che viene può essere utilizzata dalle una croce adiacente che a questo punto ne occupa anche lei $8+1$ che "perde" ai bordi</p>

Commento generale: apprezzo l'intenzione di impostare il ragionamento come una dimostrazione. Bisogna prestare un po' di attenzione all'utilizzo della lingua italiana; ad esempio: differenza di significato tra articolo determinativo ed indeterminativo; preferire quando possibile un soggetto singolo (ogni croce) piuttosto che plurale (le croci) poiché questa scelta rende possibile una descrizione più accurata (non è vero che le croci in blocco occupano 5 caselle ma rendono inagibili 8 caselle).



Incontro N°2 - Giochi con le Scelte

CARAMELLE

Ipotesi: Dati:	In una scatola ci sono: 28 caramelle alla fragola 20 caramelle alla menta 12 caramelle al kiwi 10 caramelle al mascarpone 20 caramelle al ragù 10 caramelle al finocchietto
Tesi: Richiesta:	determinare il minimo numero di caramelle che basta estrarre per essere sicuri di averne almeno 15 allo stesso gusto
Dimostrazione: Soluzione:	Sottraggo 14 caramelle a ogni gruppo <i>Commento: non è corretto dire che sottraggo 14 caramelle da un gruppo che ne ha 10 o 12. In ogni caso forse prima bisogna spiegare la motivazione della scelta di questa strategia. Sostituire</i> La situazione peggiore che si può presentare è di estrarre caramelle di ogni tipo arrivando ad averne 14 o meno di ogni tipo: dunque: prendo tutte le 10 al mascarpone, 12 al kiwi, 10 al finocchietto, ne prendo 14 di tutti gli tre altri tipi Quindi: $20 - 14 = 6$; $20 - 14 = 6$; $28 - 14 = 14$; $6 + 6 + 14 = 24 + 1$ (la caramella con cui ne totalizzo 15 uguali di certo) = 25 $100 - 25 = 75$ <i>Commento: stiamo cercando di far venire un risultato anche barando con i conti! $6 + 6 + 14 = 26$, e non 25 come scritto sopra. In ogni caso la sottrazione non c'entra (6 caramelle di menta e di ragù e 14 di fragola non danno comunque 15 caramelle uguali). Sostituire:</i> Quindi si possono estrarre fino a $10 + 10 + 12 + 14 + 14 + 14 = 74$ caramelle senza riuscire ad averne 15 uguali, ma sicuramente all'estrazione successiva si presenterà una caramella di cui sono già presenti 14 esemplari. Quindi il minimo numero di caramelle che basta estrarre per essere sicuri di averne almeno 15 allo stesso gusto è 75.

Commento generale: il gioco non era presentato come un teorema e non si presta neppure ad essere posto in questa forma: quindi non c'è ipotesi né tesi.

Incontro N°3: Giochi Logici

VICINI (??? Sembra il **GIOCO DEI CAPPELLI**)

Ciascuno pensa:

Io ne vedo 2 neri. Se io avessi un cappello bianco ~~lei~~ ogni mio vicino vedrebbe un cappello bianco e uno nero e penserebbe "per forza io non l'ho bianco, altrimenti quello che io vedo con il cappello nero l'altra (la terza) potrebbe rispondere subito nero, invece esita. ~~Quindi io non ho un cappello bianco~~". Dunque ho un cappello nero." **Ma in questo caso entrambi potrebbero esclamare all'unisono "io l'ho nero". Visto che tutti esitiamo significa che io non ho un cappello bianco.**

Commento. Attenzione, mancava l'ultima parte del ragionamento (in blu nella correzione)!

Quanto al resto, bene, anche se talora con qualche distrazione!