UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. ENRIQUES"

Progetto Lauree Scientifiche

Unità operativa di Milano Città Studi

Laboratorio di Giochi Matematici

(responsabile Prof. Stefania De Stefano)

Incontri presso il Dipartimento di Matematica "F. Enriques"

3. Soluzioni proposte dei giochi

Versione estesa [(*)]

(*) Agli studenti sono state consegnate solo le soluzioni dei giochi effettivamente svolti durante i quattro incontri

Soluzioni dei Giochi dell'incontro N° 1

Preliminari

1. **Il gioco delle tre carte**
Il gioco delle tre carte consiste nell'indovinare quale sia, fra tre carte coperte, una carta prefissata. Una volta che lo scommettitore ha puntato su una delle tre carte, il banditore (che conosce quale sia la carta da indovinare) scopre, fra le due rimaste, quella, o una di quelle, che non è la carta prefissata, consentendo poi allo scommettitore di modificare la sua scelta, qualora lo desideri. Qual è la strategia più vantaggiosa per lo scommettitore?

   Soluzione: Modificare la scelta; si passa dalla probabilità 1/3 di vincere alla probabilità 2/3. Per convincersene, si supponga che le carte, invece di tre, siano 1000 e che il banditore ne scopra 998… Se si decide di non modificare la scelta, non viene tenuta in alcun conto l'informazione ricevuta, quindi la probabilità rimane quella iniziale.

2. **Achille e la Tartaruga**: riproposizione di un quesito (N° 1) già affrontato nel quarto incontro in classe, ma poco compreso.

3. **Il sacchetto di monete truccate**: riproposizione di un quesito (N° 7) già affrontato da alcuni gruppi nel quarto incontro in classe.

Parte A

1. Ho dimenticato il numero di cellulare di un amico. Ricordo che è un numero di 7 cifre, che nessuna è 0 e che ogni cifra (tranne l'ultima a destra) è maggiore quella che si trova alla sua destra. Quanti tentativi saranno necessari al massimo per parlare con il mio amico?

   Soluzione: 36. Si tratta di prendere, tra le disposizioni semplici di 9 cifre a 7 a 7, solo quelle in cui le cifre sono in ordine decrescente; tale numero coincide con quello delle combinazioni di 9 cifre a 7 a 7 (prefissare un ordine equivale a dire che non teniamo conto dell'ordine per distinguere due disposizioni). Come visto nel gioco dei gelati, ciò significa considerare
$(3\times4\times \ldots \times9)/(1\times2\times \ldots \times7) = 8\times9/2 = 4\times9$ sequenze decrescenti di cifre.

   In modo più elementare:
Visto che le cifre del numero di cellulare si susseguono in ordine decrescente, basta decidere quali cifre provare ad utilizzare. Allo scopo pensate di aver scritto le nove cifre 9,8,…,1 in ordine decrescente: in quanti modi se ne possono scartare due (in modo da ottenere un numero di 7 cifre)? Si può scegliere la prima cifra tra nove in 9 modi differenti: ciò fatto restano otto cifre tra le quali scegliere la seconda cifra, e questo può essere fatto in 8 modi diversi: complessivamente ci sono quindi $9 \times 8 = 72$ modi di scegliere una coppia ordinata di cifre da scartare, ma per il problema è significativo solo l'insieme delle due cifre, non l'ordine in cui si scartano: quindi ci sono 36=72/2 modi in cui scartare due delle nove cifre.

2. Considerate un esagono regolare P. Quanti sono complessivamente i suoi lati e le sue diagonali?

   Soluzione: da ogni vertice partono 5 tra lati e diagonali; in tutto 15 segmenti, visto che ogni segmento è condiviso da due vertici.

3. Una compagnia ferroviaria gestisce una linea con m stazioni. Ne fa poi costruire altre n (con $n > 1$). Sapendo che per ogni nuova tratta viene stampato un nuovo tipo di biglietto e che in totale vengono stampati 46 nuovi biglietti, determinare m e n.

Soluzione: $n = 4$ ed $m = 10$. Infatti il numero di tutte le possibili tratte che uniscono k stazioni è $k(k-1)/2$ (infatti ciascuna delle k stazioni può essere unita con le restanti $k-1$, ma in questo modo ogni tratta resta contata due volte). Il numero delle tratte nuove si ottiene sottraendo, da quelle presenti alla fine, le tratte di vecchia costruzione. Dunque:

$$46 = [(m+n)(m+n-1) - m(m-1)]/2$$

cioè

$$46 \times 2 = n(2m+n-1)$$

I numeri che entrano in gioco sono tutti interi: quindi n deve essere un numero che divide $92 = 2^2 \times 23$. Esaminiamo i vari casi possibili:

- $n = 4$: allora $(2m + n - 1) = 2m + 3 = 23$, che significa $m = 10$
- $n = 2$: allora si dovrebbe avere $(2m + n - 1) = 2m + 1 = 46$, ma questo è impossibile poiché $2m + 1$ è sicuramente un numero dispari
- $n = 1$ è escluso dai vincoli del problema, mentre palesemente se $n = 23$ oppure 46 oppure 92 la seconda equazione $2m + n - 1 = 92/n$ non ha soluzioni intere e positive.

Parte B

4. In un'area pedonale alcune lastre di pietra sono poste in modo da formare un quadrato Q di lato 3 metri. Due ragazzi giocano a tirare sassolini al suo interno: 37 sassolini cadono in Q e di essi 5 cadono in un quadrato di lato un metro. È un caso o di 37 sassolini caduti in Q almeno 5 cadono sempre in un quadrato di lato 1 e perché?

Soluzione: non è un caso. Se i sassolini si distribuissero uniformemente sulla superficie del quadrato (che misura 9 metri quadrati) su ogni metro quadrato ne dovrebbero cadere 4 e ne avanzerebbe ancora 1, che dovrebbe comunque cadere in Q e quindi in uno dei quadrati di lato 1 metro in cui ne cadono già 4. Se la distribuzione non è uniforme la situazione non può che essere più favorevole.

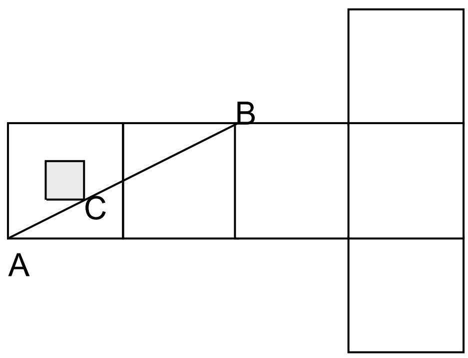
Soluzioni dei Giochi dell'incontro N° 2

1. Supponete di avvolgere (una volta) attorno alla Terra un filo perfettamente adagiato sull'equatore. Allungate il filo di un metro e sollevatelo uniformemente lungo l'equatore. L'altezza raggiunta dal filo sulla superficie terrestre è maggiore o minore di dieci centimetri? (supponete la superficie terrestre perfettamente sferica).

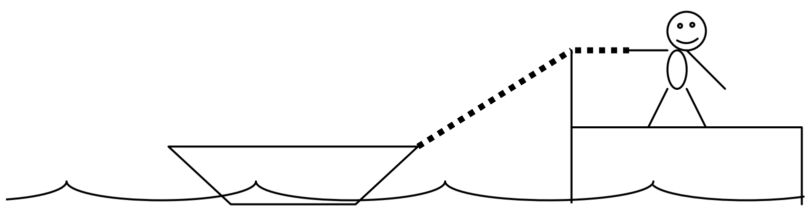
   Soluzione: maggiore di 10 centimetri. Se R è la misura in metri del raggio della Terra, la lunghezza iniziale del filo è $2\pi R$. Aumentando tale lunghezza di 1 metro il raggio della corrispondente circonferenza diventa $R+1/(2\pi)$ e quindi l'altezza in metri del filo sulla superficie terrestre è $1/(2\pi)$, che è sicuramente maggiore di 10 cm (approssimare per eccesso 2π con 7).

2. All'interno di una scatola cubica di cartone, in uno dei vertici, è posta una briciola di pane; all'esterno della scatola, nel vertice opposto al precedente, si trova una formica. La scatola ha spigolo di lunghezza 30 cm, e la sua unica apertura è un foro quadrato, di lato 10 cm, praticato al centro di una delle facce laterali. Qual è la lunghezza del più breve percorso possibile con cui la formica può raggiungere la briciola, assumendo che le pareti della scatola siano di spessore trascurabile?

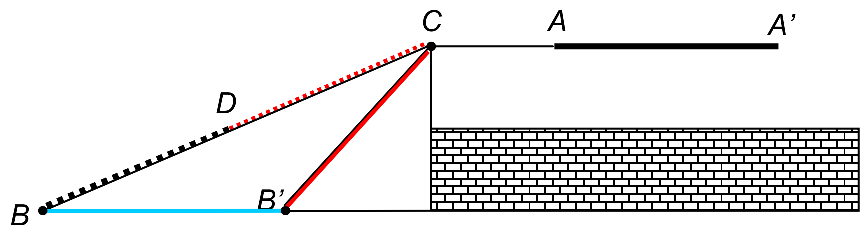
   Soluzione: $30\sqrt{5}$ cm. Visto che lavoriamo sulla superficie (esterna o interna) della scatola, ciò che importa per misurare le distanze è lo sviluppo piano della scatola di cartone, che è quello indicato a lato. A meno di simmetrie, la formica deve andare da A a B o viceversa, passando da una parte all'altra del cartone. Se non ci fosse da attraversare il cartone, il cammino minimo da A a B sarebbe rappresentato esattamente dalla lunghezza del segmento AB. D'altra parte tale segmento passa esattamente per il vertice C del quadratino interno (per la similitudine dei triangoli rettangoli di ipotenusa AC ed AB, che hanno cateti lunghi rispettivamente 20 e 10 cm, 60 e 30 cm) e quindi permette il passaggio dall'esterno all'interno. Quindi la lunghezza del percorso più breve con cui la formica raggiunge la briciola è di $30\sqrt{5}$ cm.



3. Osservate la figura: stando su un pontile alto sull'acqua che termina con una ringhiera, un uomo tiene tesa una fune a cui è legata una barca. L'uomo arretra di un metro verso terra tirando con sé la fune. La barca si avvicina al pontile di più di un metro? di esattamente un metro? di meno di un metro?



   Soluzione: di più di un metro. In figura, *A* indica la posizione iniziale dell'uomo, *A'* la sua posizione dopo lo spostamento, *C* la sommità della ringhiera, *B* la posizione iniziale della prua, *B'* la posizione finale della prua: vogliamo stimare la lunghezza *l*(*BB'*) di *BB'*. La fune può essere vista come unione dei due tratti *BC* e *CA* (situazione prima dello spostamento) oppure dei tre tratti *B'C*, *CA* e *AA'* (situazione dopo lo spostamento). Allora, se denotiamo con *D* il punto del segmento *BC* tale che *CD* sia lungo quanto *B'C*, si

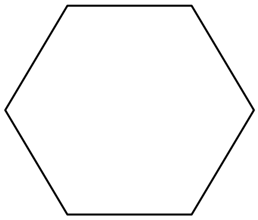


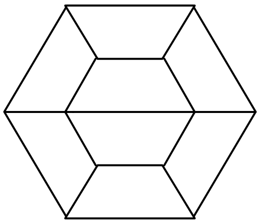
vede che il segmento *BD* misura tanto quanto il segmento *AA'*, cioè un metro. Per la disuguaglianza triangolare, deve essere

$$l(BB') + l(B'C) > l(BC) = 1 + l(CD) = 1 + l(B'C)$$

Dunque $l(BB') > 1$, cioè la barca si avvicina al pontile di più di un metro.

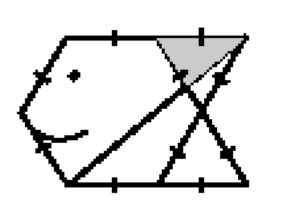
4. In figura vedete un esagono regolare. Potete suddiverlo in 8 parti di ugual forma e dimensioni? In caso di risposta negativa dovete motivarla, in caso di risposta affemativa, illustrate direttamente sulla figura la suddivisione che proponete.



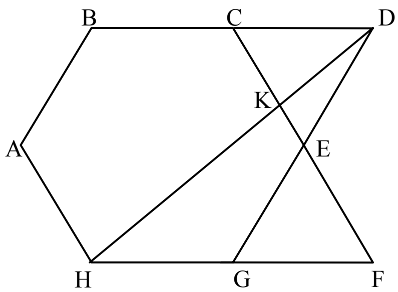


Soluzione: la figura documenta che la suddivisione richiesta è possibile. I trapezi evidenziati, costruiti congiungendo i punti medi dei segmenti che collegano vertici adiacenti al centro, hanno effettivamente le stesse dimensioni: infatti il lato di un esagono regolare è lungo quanto il raggio della circonferenza circoscritta all'esagono stesso.

5. 10 fiammiferi di uguale lunghezza sono disposti un modo da rappresentare un pesce, come indicato nella figura. L'area della regione occupata dal pesce vale 24. Quanto vale l'area del triangolo ombreggiato, delimitato utilizzando il segmento tracciato in figura fra due dei "vertici" del pesce?



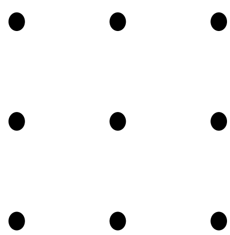
Soluzione: 2. È facile vedere che il pesce è costituito accostando 8 triangoli equilateri di lato un fiammifero (6 formano l'esagono regolare, 2 "la coda"), ciascuno dei quali viene dunque ad avere area 3. Visto che i due triangoli *DCK* e *DKE* hanno uguale altezza, le loro aree stanno nello stesso rapporto di proporzionalità delle basi *CK* e *KE*: mostriamo che tale rapporto è 2:1.



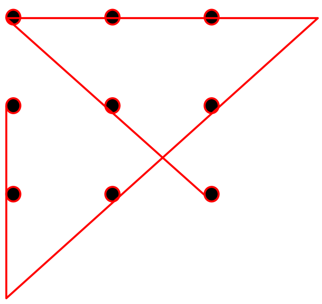
Per vederlo, osserviamo che i triangoli *CDK* e *FHK* sono simili (infatti gli angoli in *F* e *C* misurano 60° e gli angoli in *K* sono uguali) con le misure dei lati che stanno nel rapporto 1:2. Allora *CK* è lungo la metà di *KF* e dunque il doppio di *KE* (infatti *CF* è lungo quanto due fiammiferi).

Alternativamente si può procedere come segue: esternamente all'esagono aggiungiamo due triangoli equilateri (di lato un fiammifero) rispettivamente di base *AB* e terzo vertice *D'* e di base *GH* e terzo vertice *F'*: il triangolo *DD'F'* è equilatero di lato 3 fiammiferi e quindi *DH* taglia sulla base *D'F'* due segmenti *D'H* e *HF'* che stanno in rapporto 2:1. Per similitudine, anche sulla base *CE* di *CDE* il segmento *DH* taglia due segmenti *CK* e *KE* che stanno in rapporto 2:1.

6. **I nove punti** rappresentati in figura sono distribuiti nei nodi di un reticolo quadrato 3×3. Sapete congiungerli (senza staccare la matita dal foglio e senza percorrere due volte lo stesso tratto) con una spezzata che comprenda il minor numero di segmenti?



Soluzione:



Soluzioni dei Giochi dell'incontro N° 3

1. Una comitiva di 20 persone – in cui ci sono uomini, donne e bambini - parte per una passeggiata. Dovendo trasportare cibarie, indumenti ed attrezzature per il picnic, per un totale di 40 kg, viene deciso che ogni uomo porterà uno zaino da esattamente 6 kg, ogni donna uno zaino da esattamente 3 kg ed ogni bambino uno zaino da esattamente 1 kg. Come è composta la comitiva?

   Soluzione: 2 uomini, 5 donne e 13 bambini. Denotato con u il numero degli uomini e con d quello delle donne si deve avere $6u + 3d + (20 – u – d) = 40$. Dunque $5u + 2d = 20$ che, se u e d non sono nulli, comporta $u = 2$ e $d = 5$, poiché $5u = 20 – 2d$ deve essere un numero pari. Dunque i bambini sono 13.

2. L'orologio di un campanile batte allo scoccare di ogni ora un numero di rintocchi corrispondente al valore numerico dell'ora stessa (da 1 a 12), e batte un solo rintocco allo scoccare di ogni quarto d'ora, di ogni mezz'ora, e di ogni tre quarti d'ora. Si sente suonare un rintocco. Quanto tempo occorre aspettare al massimo per sapere che ore sono (basandosi unicamente sul numero dei rintocchi uditi)?

   Soluzione: 60 minuti. Infatti tanto se il rintocco è quello delle 0:15 che se è quello delle 1:00 seguiranno altri 3 rintocchi isolati: ma nel primo caso anche alle 1:15 risuonerà un rintocco solo, nel secondo, alle 2:00 risuoneranno 2 rintocchi. Tutti gli altri casi sono ovviamente più favorevoli.

3. Avete due micce, identiche fra loro, ognuna delle quali brucia in un'ora esatta. Come potete farle bruciare in modo da misurare 45 minuti di tempo se avete a disposizione un solo fiammifero e le micce non possono essere tagliate?

   Soluzione. Piegate a metà una miccia e date fuoco contemporaneamente ai due capi di questa e ad un capo dell'altra: quando la prima si sta esaurendo, piegate a metà la seconda e fate prender fuoco anche al capo rimasto intatto di questa: al suo esaurimento sono passati 45 minuti.

4. Avete una tanica piena d'acqua: in tutto sono 8 litri che volete dividere esattamente a metà, ma avete a disposizione solo una tanica da 5 litri ed una da 3. Qual è il minimo numero di travasi da fare?

   Soluzione: 7. Per essere sicuri della quantità d'acqua misurata bisogna riempire le singole taniche ed eventualmente travasarne in seguito il contenuto in altra tanica. Indichiamo con una terna ordinata i litri di acqua presenti in ogni tanica, nell'ordine (Grande, Media, Piccola). Mediante travasi successivi si ha la sequenza di terne:
   (8,0,0), (3,5,0), (3,2,3), (6,2,0), (6,0,2), (1,5,2), (1,4,3), (4,4,0), per un totale di 7 travasi.
   L'altra maniera plausibile di muoversi dà la sequenza di terne
   (8,0,0), (5,0,3), (5,3,0), (2,3,3), (2,5,1), (7,0,1), (7,1,0), (4,1,3), (4,4,0),
   per un totale di 8 travasi, che sono in numero maggiore di quelli appena trovati.

5. Un allevatore si accorge di avere munto del latte molto denso e decide così di annacquarlo. Avendo a disposizione due bidoni, uno contenente il latte fresco, l'altro contenente acqua pura, procede nel seguente modo.
   1) Travasa dal bidone A al bidone B tanto liquido da raddoppiare il volume del liquido contenuto in B.
   2) Poi travasa da B in A in modo da raddoppiare il volume del liquido ora contenuto in A.
   3) Infine versa ancora il liquido da A a B raddoppiando il volume del liquido al momento contenuto in B.
   Ora i due bidoni contengono la stessa quantità di liquido e in B l'acqua è 1 litro in più del latte.
   Non vi è stato detto se il latte fosse inizialmente in A oppure in B: potete ugualmente stabilire quanta acqua e quanto latte si avevano inizialmente e in che quantità i due liquidi sono presenti nei due bidoni alla fine? (Supponete che i liquidi si mescolino sempre perfettamente.)

   Soluzione: in A c'erano 5,5 litri di acqua ed in B 2,5 litri di latte. Chiamiamo α il liquido inizialmente contenuto in A e β quello contenuto in B. Possiamo risolvere il problema in termini di proporzioni: nel primo passaggio in A resta una parte di α (e nessuna di β) mentre in B i liquidi α e β sono in rapporto

1:1. Ora si deve versare in A il liquido contenuto in B in quantità pari a quella contenuta in A: dunque se in A ci sono 2 "unità" di liquido α, verrà aggiunta una unità di liquido α ed una di β che quindi restano in rapporto 3:1. Ora si deve travasare parte di questo liquido in B: supponendo (per comodità) che in B ci siano 2 "unità" di liquido α e 2 di liquido β (di valore non necessariamente uguale a quello della precedente unità), ne aggiungiamo 3 di liquido α e 1 di liquido β, ottenendo alla fine una miscela in cui i liquidi α e β sono in rapporto 5:3. Ora visto che sappiamo che alla fine l'acqua presente in B è un litro più del latte, possiamo innanzitutto dedurre che α è l'acqua e β il latte. Inoltre se le unità k di liquido in B sono 8, si ha $5k - 3k = 1$ litro. Quindi l'unità in esame è il mezzo litro.

- alla fine in B ci sono 1,5 litri di latte e 2,5 litri di acqua, mentre in A ci sono 3 litri di acqua ed uno di latte
- inizialmente in A c'erano 5,5 litri di acqua ed in B 2,5 litri di latte

Formalmente si potrebbe organizzare il discorso così. Indichiamo le quantità di liquido nei due bidoni A e B come "coppie ordinate"; se denotiamo con a la quantità di liquido presente inizialmente in A e con b quella presente in B, si parte da (a, b); al primo passaggio si ha $(a - b, 2b)$, al secondo $(2a - 2b, 3b - a)$, al terzo $(3a - 5b, 6b - 2a)$ e so che $3a - 5b = 6b - 2a$ cioè $5a = 11b$.
Questo è possibile se le due quantità a e b si possono scrivere come multiple di un'altra quantità k:

$$a = 11k \quad \text{e} \quad b = 5k.$$

Al primo passaggio in B c'è una quantità di α e di β pari a $5k$ (quindi in un rapporto 1:1); al secondo passaggio in A c'è una quantità di α pari a $6k + 3k$ e di secondo liquido pari a $3k$ (quindi in un rapporto 3:1). Alla fine in B c'è una quantità di α pari a $2k + 3k = 5k$ e di β pari a $2k + k = 3k$. Visto che β è in quantità inferiore, esso è il latte e $2k = 1$ litro …..

6. Avendo a disposizione una bilancia a due piatti e cinque pesi da 1, 3, 9, 27 e 81 grammi, quanti pesi diversi si possono misurare?

   Soluzione: 121. Osserviamo che mettere un peso A su un piatto ed un peso B sull'altro (insieme a quanto da pesare) equivale a misurare il peso A – B. Si hanno dunque le seguenti possibili misure: 1, 3–1, 3, 3+1, 9–(3+1), 9–3, 9–(3–1), 9–1, 9; sommando i primi 4 a 9 si arriva a 9+(3+1)=13; sottraendo da 27 i primi 13 in ordine inverso si va da 27–13 a 27–1 mentre sommandoli si arriva a 27+[9+(3+1)]=40; sottraendo da 81 i primi 40 in ordine inverso si va da 81–40 a 81–1 mentre sommandoli si arriva a 81+40=121. [Implicazione della serie geometrica: per ogni numero intero $n \geq 0$ la somma $(1+3+\ldots+3^{n-1})$ delle prime n potenze di 3 è la metà di 3^n-1.]

7. In uno stesso mese tre domeniche sono cadute in giorni pari. Quale giorno della settimana era il 20 di quel mese?

   Soluzione: giovedì. Infatti due domeniche consecutive non cadono entrambe in un giorno pari (o dispari). Di conseguenza nel mese ci sono state 5 domeniche, la prima il 2, l'ultima il 30. Quindi il 20 del mese era giovedì.

8. Nel mese di dicembre di un certo anno vi furono esattamente quattro domeniche e quattro mercoledì. In quale giorno della settimana cadde il 3 febbraio dell'anno successivo?

   Soluzione: venerdì. In quel dicembre c'erano 5 giovedì, venerdì e sabati, cioè il mese finì di sabato; il 29 gennaio cadde quindi di domenica ed il 3 febbraio di venerdì.

9. Alla fine di un torneo di pallavolo con un solo girone all'italiana (dove ogni squadra incontra una sola volta tutte le altre), esiste sempre almeno una squadra A che negli incontri con ogni altra squadra B o ha vinto o ha battuto una squadra che ha battuto B? Motivate la risposta. (N.B. nella pallavolo nessuna partita si conclude in parità).

   Soluzione: ogni squadra A a punteggio massimo è in questa condizione. Infatti, se A non avesse battuto B e non avesse battuto alcuna delle squadre che hanno battuto B (cioè se A è stata battuta, oltre che da B, anche da tutte le squadre che hanno battuto B) il punteggio di A sarebbe sicuramente inferiore a quello di B.

Soluzioni dei Giochi dell'incontro N° 4

1. Considerate un esagono regolare P. Nel primo incontro avete trovato che il numero di segmenti che uniscono a due a due i vertici di P sono 15.
   a) Quanti sono i triangoli i cui vertici sono vertici di P (e i cui lati sono lati o diagonali di P)?
   b) Se avete a disposizione due colori (rosso e blu) per colorare i lati e le diagonali di P (i vertici possono essere soggetti a doppia colorazione), in quanti modi diversi potete colorare i lati e le diagonali di P? (pensate l'esagono fisso).
   c) Considerate ora tutti i possibili triangoli i cui vertici sono vertici di P: c'è una colorazione che eviti i triangoli monocromatici?

   Soluzione. a) I triangoli i cui vertici sono vertici di P sono quanti i modi di prendere i vertici dell'esagono a 3 a 3, cioè (6×5×4):(2×3) = 20.
   b) Ogni segmento può essere colorato in 2 modi diversi e quindi in totale ci sono 2^{15} = 32.768 colorazioni distinte.
   c) Quindi, a meno dello scambio dei colori, per vedere se esiste una colorazione che eviti i triangoli monocromatici dovremmo esaminare 2^{14} = 16.384 colorazioni. È chiaro che, considerando configurazioni "ruotate", il numero di colorazioni può essere ulteriormente ridotto e non è utopistico pensare che, con molta pazienza, si possa arrivare alla soluzione del problema esaminando tutti i casi possibili; certamente sarebbe lavoro di poco conto per un computer. La seguente semplice considerazione può comunque evitare tutto questo. Si isoli un vertice qualunque **v** di *P*: da esso si staccano 5 segmenti ad almeno 3 dei quali deve essere assegnato uno stesso colore α (l'altro sia β). Si consideri il triangolo *T* i cui vertici coincidono con i secondi estremi di questi 3 segmenti: se uno almeno dei suoi lati è colorato in α, esiste un triangolo monocromatico con un vertice in **v**; in caso contrario, *T* stesso è un triangolo monocromatico (colorato in β). In questo caso dunque non si possono evitare triangoli monocromatici.
   Può sorprendere il fatto che il problema analogo con n = 45 e k = 5 sia tuttora aperto: una stima grossolana, non difficile da ottenere, rivela che un computer "tradizionale" potrebbe fornire la risposta in un'ora, esaminando tutte le configurazioni possibili, solo assorbendo un quantitativo di energia pari a quello prodotto dall'uomo sull'intera superficie terrestre nell'arco di 20 anni.

Altri giochi in cui contare elementi di una figura geometrica si trovano ai numeri 11, 12

2. Dieci ragazzi vogliono giocare a pallacanestro. In quanti modi diversi è possibile formare le due squadre (5 ragazzi ciascuna), tenendo conto che Matteo vuole giocare con Stefano e che Beppe non vuole giocare con Andrea? (Tutti i ragazzi hanno nomi diversi fra loro.)

   Soluzione: 30. Denotiamo Matteo, Stefano, Andrea e Beppe con le iniziali dei loro nomi. Visto che A e B vogliono stare in squadre diverse, denotiamo ognuna delle due squadre con la loro iniziale. Se MS fanno parte della squadra A, gli altri due componenti della squadra possono essere scelti, tra i restanti 6, in (6×5):2 modi (si divide per 2 poiché è indifferente se X e Y entrano a far parte della squadra in quest'ordine o nell'ordine inverso: anche in questo gioco, come in quello dei gelati, si considerano le *combinazioni* di 6 elementi a 2 a 2). Analogamente se MS fanno parte della squadra B. Quindi sommando si arriva a 30 modi di formare le squadre.

3. In un'urna vi sono 17 palline numerate da 1 a 17. Avete la possibilità di effettuare un'unica estrazione di un numero di palline a vostra scelta. Volendo essere certi che, fra le palline che estraete, ve ne siano almeno due la somma dei cui numeri sia 18, quante ne dovete estrarre?

Soluzione: 10. Vi sono 8 coppie non ordinate di interi fra 1 e 17 che sommati danno 18, e questi interi sono tutti diversi fra loro, dunque sono 16 in tutto. Se si estraggono 9 numeri, può accadere che uno sia 9 e che di ognuna di queste coppie sia presente un solo numero. Estraendone 10 invece, necessariamente fra questi si devono ritrovare entrambi gli interi di una coppia di cui sopra.

4. Maria ha 6 cartoncini di colore diverso, su ciascuno dei quali è segnato un numero naturale. Sceglie tre cartoncini e calcola la somma dei numeri corrispondenti. Dopo aver fatto questa operazione in tutti i 20 modi possibili, scopre che in 10 casi ha ottenuto 16, e negli altri ha ottenuto 18. Quanto vale il più piccolo dei numeri segnati sui cartoncini?

Soluzione: 4. Il punteggio complessivo ottenuto con le venti estrazioni è $16\times10+18\times10=340$. D'altra parte ogni cartoncino viene estratto 10 volte (poiché, pensandolo come primo cartoncino, ci sono 10 modi per scegliere gli altri): quindi la somma dei valori dei cartoncini è 34. Tre di questi cartoncini comunque scelti hanno somma che non supera 18. Supponiamo che ci sia un 1 tra i numeri segnati sui cartoncini: la somma dei rimanenti 5 numeri deve dare 33 e quindi il valore medio di ogni cartoncino deve superare 6, per cui ci saranno almeno 3 cartoncini la cui somma è >18 (ad es. 21 come succede scomponendo così

$$33 = 6 + 6 + 7 + 7 + 7 = 6 + 6 + 6 + 7 + 8 = 6 + 6 + 6 + 6 + 9).$$

In modo analogo si vede che non ci può essere un 2 o un 3.
Invece ci può essere un 4, visto che $34 = 4 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$: e tra l'altro si vede che se i cartoncini hanno questi valori in metà dei casi 3 cartoncini hanno somma 16 e nell'altra metà hanno somma 18.
D'altra parte è chiaro che il più piccolo numero segnato sui cartoncini non può essere 6 (la somma di tutti i cartoncini darebbe almeno 36) e neppure 5 poiché è vero che $34 = 5 + 5 + 6 + 6 + 6 + 6$, ma in questo caso si avrebbero anche estrazioni in cui il punteggio è 17.

Altri giochi di strategia si trovano ai numeri 7, 8, 9, 10

5. Un giocatore professionista di dadi accetta di scommettere sull'uscita, con 4 lanci di 1 solo dado, di un 6. Lo stesso giocatore non accetterà mai di scommettere sull'uscita di un doppio 6 con 24 lanci di 2 dadi. Perché?

Soluzione. Sa che, su $6^4 = 1296$ eventi, il 6 ha solo $(6-1)^4 = 625$ occasioni di non uscire pari ad una probabilità di circa il 48,2%. Invece, su $(6\times6)^{24}$ eventi, il doppio 6 ha $(36-1)^{24}$ occasioni di non uscire pari a una probabilità di circa il 50,8%.

6. Permutando in tutti i modi possibili le cifre del numero 1234567 si ottengono 7! numeri interi di 7 cifre. Qual è la somma di questi 7! numeri?

Soluzione: 22 399 997 760. Può essere utile cominciare a capire come organizzare il discorso con un numero più piccolo: 1234. In questo caso le possibili permutazioni sono 24: di esse 6 hanno come cifra delle unità 1, altre 6 hanno 2, altre 6 hanno 3 ed altre 6 hanno 4. Per avere la cifra delle unità della somma basta quindi sommare $6 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 60$: la cifra delle unità è 0 e si ha un riporto di 6. Lo stesso ragionamento sulle decine porta come risultato 66: cifra delle decine 6, e riporto 6. Proseguendo così anche per le centinaia e le migliaia si arriva a dire che la somma vale 66660.
Ora si può estendere questo ragionamento al numero proposto: 1234567. Qui ogni cifra comparirà in ogni colonna $6! = 720$ volte e la somma delle cifre vale $1 + 2 + \ldots + 7 = 28$, quindi la cifra delle unità è quella del numero $720 \times 28 = 20160$ e, riportando successivamente 2016, 2217, 2237 e per tre volte 2239, si ottiene che la somma vale 22 399 997 760.

Altri quesiti

7. In un'urna vi sono 35 palline. Compiamo delle estrazioni successive seguendo rigorosamente questa procedura:
   - alla prima estrazione si prende una pallina;
   - a ogni successiva estrazione (ultima inclusa) va presa una pallina in più o una in meno rispetto all'estrazione precedente.

   Qual è il numero minimo di estrazioni sufficiente perché l'urna resti vuota? Motiva la risposta.

   Soluzione: 9. Non bastano 7 estrazioni, poiché al massimo si potrebbero estrarre
   $$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 \text{ palline.}$$
   Non ne bastano neppure 8, poiché 28 + 8 = 36 mentre 28 + 6 = 34, il che significa che, se ad anche una sola delle estrazioni estraessimo una pallina in meno rispetto all'estrazione precedente anziché una in più, non arriveremmo a svuotare l'urna.
   D'altra parte 9 estrazioni sono sufficienti: basta estrarre, per esempio, nell'ordine 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 5 palline, oppure 1, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 5 palline.

8. Indicate come può essere individuato un insieme di 200 numeri interi compresi fra 1 e 300, estremi inclusi, in modo che sia rispettata la seguente clausola: se nell'insieme è presente un numero, allora non è presente il suo doppio.

   Soluzione. Possiamo scegliere tutti i numeri da 151 a 300 inclusi, quelli da 38 a 75 inclusi, quelli da 10 a 18 inclusi e infine i numeri 3, 4, 1. Oppure possiamo scegliere tutti i 150 numeri dispari (da 1 a 299), poi i multipli di 4 ma non di 8 (da 4 a 300: 38 numeri), quindi i multipli di 16 ma non di 32 (da 16 a 272: 9 numeri), quindi i multipli di 64 ma non di 128 (64 e 192: 2 numeri) e infine 256, per un totale di 200.

9. Considerate una successione di numeri interi positivi, tale che ogni numero dal terzo in poi sia la somma di tutti quelli che lo precedono, il primo numero sia 1 e l'ultimo sia 1000. Nella più lunga successione che si può costruire con questa legge, quanto vale il secondo numero?

   Soluzione. 124. Infatti, si chiami x il secondo numero che compare nella successione; i numeri che compaiono nella successione sono:
   1, x, $1 + x$, $1 + x + (1 + x) = 2(1 + x)$, $1 + x + (1 + x) + 2(1 + x) = 4(1 + x)$,
   $1 + x + (1 + x) + 2(1 + x) + 4(1 + x) = 8(1 + x)$ …
   In sostanza i numeri della successione dal quarto in poi si ottengono moltiplicando il precedente per 2. Ora 1000 è divisibile per 8 ma non per 16: quindi la più lunga sequenza di questo tipo che termini con 1000 si ha prendendo x in modo che sia $8(1 + x) = 1000$, cioè $x = 124$.

10. Presi 5 interi qualsiasi, è sempre possibile trovarne 3 la cui somma è un multiplo di 3?

    Soluzione. Sì. Ci sono solo tre possibili resti nella divisione di un numero intero per 3: 0, 1, 2. Se almeno 3 dei 5 numeri hanno lo stesso resto nella divisione per 3 (cioè hanno la forma $3m + r$, $3n + r$, $3p + r$) la loro somma è certamente multiplo di 3; in caso contrario ci deve essere almeno un numero con ciascuno dei resti possibili (cioè della forma $3m$, $3n + 1$, $3p + 2$) e ancora la loro somma è un multiplo di 3.

11. Quanti sono i triangoli non degeneri di perimetro 20 cm, le misure dei cui lati sono date da un numero intero di centimetri?

    Soluzione: 8. In base alla disuguaglianza triangolare - che afferma che la somma delle lunghezze di due lati di un triangolo non degenere è maggiore della lunghezza del terzo lato - si devono trovare tutte le partizioni in numeri interi del numero 20 in cui nessun numero sia maggiore di 9: (9,9,2), (9,8,3), (9,7,4), (9,6,5), (8,8,4), (8,7,5), (8,6,6), (7,7,6).

12. Quanti triangoli non degeneri con lati tutti diversi si possono costruire con 10 segmenti lunghi rispettivamente 1, 2, … , 10 centimetri?

Soluzione: 50. Infatti denotiamo con m la lunghezza del lato più corto e con n e p ($n < p$) quella degli altri: per la disuguaglianza triangolare si deve avere $m + n > p$ ed in particolare $m > 1$. Contiamo ora le terne ammissibili:

- $m = 2$: (2,3,4), (2,4,5), (2,5,6), (2,6,7), (2,7,8), (2,8,9), (2,9,10): totale 7
- $m = 3$: (3,4,5), (3,4,6); (3,5,6), (3,5,7); (3,6,7), (3,6,8); (3,7,8), (3,7,9); (3,8,9), (3,8,10); (3,9,10): totale 11
- $m = 4$: (4,5,6), (4,5,7), (4,5,8); (4,6,7), (4,6,8), (4,6,9); (4,7,8), (4,7,9), (4,7,10); (4,8,9), (4,8,10), (4,9,10): totale 12
- da $m = 5$ a $m = 8$ la disuguaglianza triangolare è automaticamente soddisfatta e quindi basta fare il conto delle combinazioni di $10 – m$ oggetti a due a due: 10 + 6 + 3 + 1 = 20.