UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. ENRIQUES"

Progetto Lauree Scientifiche

Unità operativa di Milano Città Studi

Laboratorio di Giochi Matematici

(responsabile Prof. Stefania De Stefano)

Incontro presso il
Liceo Scientifico "Leonardo da Vinci" di Milano

3. Soluzioni dei quesiti proposti nella gara

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. ENRIQUES"

Progetto Lauree Scientifiche
Unità operativa di Milano Città Studi
Laboratorio di Giochi matematici

Settimana della Scienza
al Liceo Scientifico Statale "Leonardo da Vinci" di Milano
(27 aprile 2006 - 3 maggio 2006)

Giochi Matematici

28 aprile 2006

Gara delle Classi Prime

1) (*5 punti*) È possibile che un'automobile percorra 25.000 Km e ciascuno dei cinque pneumatici di cui è dotata (quattro più la ruota di scorta) venga utilizzato per lo stesso numero di chilometri? Se rispondi "no" spiega perché, se rispondi "sì" indica una possibile strategia di sostituzione degli pneumatici.

   Risoluzione. **Sì**. Chiamiamo A, B, C, D, E i 5 pneumatici. Per i primi 5000 km utilizzo ABCD, per i secondi 5000 utilizzo EBCD, per i terzi 5000 utilizzo EACD, per i quarti 5000 utilizzo EABD ed infine utilizzo EABC.

2) (*7 punti*) Anna e Mara iniziano a contare nello stesso istante e con la stessa cadenza. Anna conta di due in due crescendo a partire da 108 (109, 110, 111, …), mentre Mara conta di cinque in cinque decrescendo a partire da 953 (953, 948, 943…). Di quanto differiranno i due numeri più vicini che esse pronunceranno nello stesso istante?

   Risoluzione. Al passaggio n il numero detto da Mara è uguale alla somma di un opportuno intero (eventualmente negativo) r con il numero detto da Anna: $108+2n+r=953-5n$. L'uguaglianza $7n+r=845$ dà $|r|$ minimo se r è il resto della divisione di 845 per 7 oppure tale resto -7. Il resto è $r=5$, che è maggiore di $|5-7|$. Quindi la differenza è 2 ed i due numeri detti da Anna e Mara sono rispettivamente $108+242=350$, $953-605=348$.

3) (*11 punti*) Un lato AC di un triangolo è suddiviso in 29 segmenti uguali fra loro utilizzando 28 segmenti paralleli al lato BC, ciascuno avente un estremo sul lato AB e l'altro, appunto, su AC. Se BC è lungo 10 metri, quanto misura la somma delle lunghezze di questi 28 segmenti?

   Risoluzione. **140 metri**. Per il teorema di Talete i 28 segmenti paralleli a BC misurano rispettivamente 1/29, 2/29, 3/29, ecc. del cateto BC. La somma delle loro lunghezze è quindi

$$10 \times (1+2+\ldots + 28)/29 = 140 \text{ metri.}$$

4) (*14 punti*) La lancetta delle ore di un orologio compie un giro completo in 12 ore mentre quella dei minuti compie un giro completo in un'ora. Entrambe le lancette ruotano con continuità. Vi sono alcuni istanti in cui le due lancette sono sovrapposte. Quanto tempo intercorre tra uno di questi istanti ed il successivo?

Risoluzione. **1 h 5' 27 " e 3 /11**. Infatti le lancette si sovrappongono a intervalli di tempo uguali tra loro, chiaramente superiori all'ora: 11 di tali intervalli coprono 12 ore. La risposta segue dal fatto che si ha 3600 =327 × 11 + 3 e che 327 secondi corrispondono a 5 minuti + 27 secondi.

5) (*18 punti*) In un'urna ci sono 10 gettoni marcati con i numeri da 1 a 10. Se si estrae un gettone e lo si rimette nell'urna e si ripete questa operazione altre due volte, qual è la probabilità che l'ultimo numero estratto sia la media degli altri due? E che uno qualsiasi dei tre sia la media degli altri due?

Risoluzione. Risoluzione. **1/20** e **13/100**. Il risultato di ciascuna delle tre estrazioni è una fra le 10^3 = 1000 terne ordinate possibili di numeri, che sono equiprobabili. Se la indichiamo con (a,b,c), affinché c sia la media di a e b si deve avere a+b = 2c e quindi prima di tutto a e b devono essere entrambi pari o entrambi dispari; quando ciò accade, la coppia (a,b) determina univocamente c, quindi la terna ammissibile (a,b,c). Le coppie ordinate di numeri pari sono 25 e così pure quelle di dispari, quindi i casi favorevoli sono 50/1000 = 1/20. Se non è importante quale dei tre numeri sia la media degli altri due, per ciascuna delle 20 terne ammissibili di elementi diversi fra loro vanno considerate 6 permutazioni (120 casi), mentre le restanti 10, avendo i tre elementi coincidenti, vanno contate una sola volta. Dunque la probabilità è 13/100.

6) (*22 punti*) Dieci ragazzi vogliono giocare a pallacanestro. In quanti modi diversi è possibile formare le due squadre (5 ragazzi ciascuna), tenendo conto che Matteo vuole giocare con Stefano e che Beppe non vuole giocare con Andrea? (Tutti i ragazzi hanno nomi diversi fra loro.)

Risoluzione. **30**. Denotiamo Matteo, Stefano, Andrea e Beppe con le iniziali dei loro nomi. Visto che A e B vogliono stare in squadre diverse, denotiamo ognuna delle due squadre con la loro iniziale. Se MS fanno parte della squadra A, gli altri due componenti della squadra possono essere scelti, tra i restanti sei, in (6×5):2 modi (si divide per 2 poiché è indifferente se X e Y entrano a far parte della squadra in quest'ordine o nell'ordine inverso). Analogamente se MS fanno parte della squadra B. Quindi sommando si arriva a 30 modi diversi tra loro di formare le squadre.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. ENRIQUES"

Progetto Lauree Scientifiche
Unità operativa di Milano Città Studi
Laboratorio di Giochi matematici

Settimana della Scienza
al Liceo Scientifico Statale "Leonardo da Vinci" di Milano
(27 aprile 2006 - 3 maggio 2006)

Giochi Matematici

28 aprile 2006

Gara delle Classi Seconde

1) (*5 punti*) Anna e Mara iniziano a contare nello stesso istante e con la stessa cadenza. Anna conta di due in due crescendo a partire da 108 (109, 110, 111, …), mentre Mara conta di cinque in cinque decrescendo a partire da 953 (953, 948, 943…). Di quanto differiranno i due numeri più vicini che esse pronunceranno nello stesso istante?

   Risoluzione. Al passaggio n il numero detto da Mara è uguale alla somma di un opportuno intero (eventualmente negativo) r con il numero detto da Anna: $108+2n+r=953-5n$. L'uguaglianza $7n+r=845$ dà $|r|$ minimo se r è il resto della divisione di 845 per 7 oppure tale resto -7. Il resto è $r = 5$, che è maggiore di $|5-7|$. Quindi la differenza è 2 ed i due numeri detti da Anna e Mara sono rispettivamente $108+242=350$, $953-605=348$.

2) (*7 punti*) Un lato *AC* di un triangolo è suddiviso in 29 segmenti uguali fra loro utilizzando 28 segmenti paralleli al lato *BC*, ciascuno avente un estremo sul lato *AB* e l'altro, appunto, su *AC*. Se *BC* è lungo 10 metri, quanto misura la somma delle lunghezze di questi 28 segmenti?

   Risoluzione. **140 metri**. Per il teorema di Talete i 28 segmenti paralleli a *BC* misurano rispettivamente 1/29, 2/29, 3/29, ecc. del cateto *BC*. La somma delle loro lunghezze è quindi

$$10 \times (1+2+\ldots + 28)/29 = 140 \text{ metri.}$$

3) (*11 punti*) La lancetta delle ore di un orologio compie un giro completo in 12 ore mentre quella dei minuti compie un giro completo in un'ora. Entrambe le lancette ruotano con continuità. Vi sono alcuni istanti in cui le due lancette sono sovrapposte. Quanto tempo intercorre tra uno di questi istanti ed il successivo?

Risoluzione. **1 h 5' 27 " e 3 /11**. Infatti le lancette si sovrappongono a intervalli di tempo uguali tra loro, chiaramente superiori all'ora: 11 di tali intervalli coprono 12 ore. La risposta segue dal fatto che si ha 3600 =327 × 11 + 3 e che 327 secondi corrispondono a 5 minuti + 27 secondi.

4) (*14 punti*) In un'urna ci sono 10 gettoni marcati con i numeri da 1 a 10. Se si estrae un gettone e lo si rimette nell'urna e si ripete questa operazione altre due volte, qual è la probabilità che l'ultimo numero estratto sia la media degli altri due? E che uno qualsiasi dei tre sia la media degli altri due?

Risoluzione. **1/20** e **13/100**. Il risultato di ciascuna delle tre estrazioni è una fra le 10^3 = 1000 terne ordinate possibili di numeri, che sono equiprobabili. Se la indichiamo con (a,b,c), affinché c sia la media di a e b si deve avere a+b = 2c e quindi prima di tutto a e b devono essere entrambi pari o entrambi dispari; quando ciò accade, la coppia (a,b) determina univocamente c, quindi la terna ammissibile (a,b,c). Le coppie ordinate di numeri pari sono 25 e così pure quelle di dispari, quindi i casi favorevoli sono 50/1000 = 1/20. Se non è importante quale dei tre numeri sia la media degli altri due, per ciascuna delle 20 terne ammissibili di elementi diversi fra loro vanno considerate 6 permutazioni (120 casi), mentre le restanti 10, avendo i tre elementi coincidenti, vanno contate una sola volta. Dunque la probabilità è 13/100.

(*18 punti*) Dieci ragazzi vogliono giocare a pallacanestro. In quanti modi diversi è possibile formare le due squadre (5 ragazzi ciascuna), tenendo conto che Matteo vuole giocare con Stefano e che Beppe non vuole giocare con Andrea? (Tutti i ragazzi hanno nomi diversi fra loro.)

Risoluzione. **30**. Denotiamo Matteo, Stefano, Andrea e Beppe con le iniziali dei loro nomi. Visto che A e B vogliono stare in squadre diverse, denotiamo ognuna delle due squadre con la loro iniziale. Se MS fanno parte della squadra A, gli altri due componenti della squadra possono essere scelti, tra i restanti sei, in (6×5):2 modi (si divide per 2 poiché è indifferente se X e Y entrano a far parte della squadra in quest'ordine o nell'ordine inverso). Analogamente se MS fanno parte della squadra B. Quindi sommando si arriva a 30 modi diversi tra loro di formare le squadre.

5) (*22 punti*) Avete quattro assi di cuori e quattro assi di picche. In quanti modi potete disporli in una griglia 4×4 se volete che su ogni riga ed ogni colonna compaiano esattamente un asse di cuori ed uno di picche?

Risoluzione. **216**. Denotiamo le carte di cuori con 1, quelle di picche con –1 e i posti vuoti con zero. Una ed una sola riga deve iniziare con 1. Incominciamo ad esaminare il caso in cui tale riga è la prima riga ad iniziare con 1; i rimanenti posti possono essere riempiti in tre diversi modi: –1 0 0, 0 –1 0, 0 0 –1. Per ciascuno di questi modi ci sono, a meno di permutazioni delle righe, tre modi di completare la tabella rispettando le richieste: ad es. se la prima riga è 1 –1 0 0, questi tre modi sono i seguenti:

1	–1	0	0
–1	1	0	0
0	0	1	–1
0	0	–1	1

1	–1	0	0
–1	0	1	0
0	1	0	–1
0	0	–1	1

1	–1	0	0
–1	0	0	1
0	1	–1	0
0	0	1	–1

Permutando in tutti i modi possibili le 3 righe diverse dalla prima, ciascuna di queste tabelle dà luogo a 6 tabelle diverse, tutte accettabili. Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per ciascuna delle altre due "prime righe" (che sono ottenute per permutazione degli ultimi tre elementi della prima) e quindi si perviene a contare almeno 6×9=54 tabelle distinte che hanno 1 come primo elemento della prima riga. Ora ripetiamo questo procedimento supponendo che ad iniziare con 1 sia la seconda, poi la terza, poi la quarta riga: il totale sale a 54×4=216. È ovvio che così tutte le possibilità sono state considerate una ed una sola volta.