

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di perfezionamento in  
**TECNICHE E DIDATTICA  
LABORATORIALI**

Relazione finale di

*Paola Maria CEREDA*

Docente di riferimento:

*Prof.ssa* Maria DEDÒ

ANNO ACCADEMICO 2008-2009

## Premessa

Durante il corso di perfezionamento in “Tecniche e didattica laboratoriali” ci è stata offerta la possibilità da un lato di riflettere e di confrontarci su come un tipo di didattica, quella attiva, possa essere proficuamente utilizzata nelle scuole superiori, dall’altro di progettare e di sperimentare parte di un percorso di questo tipo inerente la matematica e/o la fisica.

Sono docente di matematica (classe A047), laureata in matematica, ed è quindi stato per me naturale scegliere di dedicarmi ad una laboratorio di area matematica, in particolare ad uno relativo al tema della classificazione che trae la sua origine dalla mostra “Uguali? Diversi! – La bottega del matematico” realizzata dal centro **matematita** e allestita al Festival della Scienza di Genova 2008.

Le 25 ore sono state quindi dedicate alla predisposizione del materiale relativo ad una parte di tale laboratorio, più precisamente ad una attività di topologia sulla classificazione di CILINDRI e NASTRI DI MOEBIUS rivolta a studenti di classi del biennio di Istituti Superiori a matematica debole. Le ore sono state così impiegate:

- realizzazione di schede da proporre ai ragazzi
- osservazioni post-sperimentazione e revisione del materiale prodotto
- incontri (a cadenza quasi bisettimanale, a partire da gennaio) con la docente di riferimento e i compagni del corso che si occupavano del medesimo laboratorio, al fine di mettere in comune i propri dubbi, suggerimenti, idee, proposte.

A tal proposito sottolineo due aspetti importanti: il primo riguarda la possibilità di sperimentare un’attività mentre la si sta progettando, il che permette di rendersi immediatamente conto di ciò che non funziona e di ciò che può essere migliorato (più avanti nella relazione presenterò un esempio), il secondo concerne la ricchezza di stimoli che può dare il confronto con altre persone che stanno riflettendo su analoghe questioni.

Le 15 ore dedicate alle sperimentazioni sono state suddivise in 7 ore svolte in classi di cui non sono docente e 8 in mie classi.

*Sperimentazioni in classi di cui non sono docente:*

- I.S.I.S.S. “Betty Ambiveri” di Presezzo (BG), classe IIA-SP del Liceo Socio-psicopedagogico
  - **4 h** (un’ora alla settimana) dal 28 febbraio ’09 al 21 marzo ’09  
**Laboratorio:** Uguali? Diversi!  
Attività sui nastri
- Liceo Scientifico “Leonardo da Vinci” di Milano, classi IV B e IV F
  - **3 h** - 26 marzo ’09  
**Laboratorio:** Cubi e Ipercubi  
Attività sugli SVILUPPI DI UN CUBO e sulle sue sezioni piane (AFFETTIAMO UN CUBO)

*Sperimentazioni in classi di cui sono docente:*

- I.S.I.S.S. “Betty Ambiveri” – Presezzo  
classe IA-TA dell’Istituto Professionale per i Servizi Commerciali e Turistici
  - **2 h** - 18 e 20 aprile ’09  
**Laboratorio:** Dai poligoni ai politopi  
**Compresenza:** Alessandra BRENA  
Attività sui poliedri regolari (scheda: DAI POLIGONI REGOLARI AI POLIEDRI REGOLARI)
  - **2 h** – 27 e 28 aprile ’09  
**Laboratorio:** Diamo forma alla geometria: regolari o no?  
Attività sulle tassellazioni regolari e su quelle uniformi
- classe IIA-TA dell’Istituto Professionale per i Servizi Commerciali e Turistici
  - **4 h** – 18, 20, 27 e 28 aprile ’09  
**Laboratorio:** Uguali? Diversi!  
**Compresenza:** Alessandra BRENA (nei primi due incontri)  
Attività sui nastri

# I NASTRI

## nel laboratorio “Uguali? Diversi!”

Questa parte del laboratorio “Uguali? Diversi!” propone ai ragazzi di classificare un insieme di immagini (si vedano quelle allegate) rappresentanti alcune superfici ottenute da un rettangolo, identificando due lati opposti dopo aver effettuato un certo numero di mezze torsioni. Queste superfici vengono chiamate NASTRI.

L’attività (si vedano le schede NASTRI 1 e NASTRI 2 in allegato) è strutturata in tre fasi:

1. si chiede ai ragazzi di provare a classificare i nastri scegliendo liberamente un criterio di classificazione (scelta arbitraria, purché coerente);
2. si accompagna gli alunni a classificare i nastri a meno di omeomorfismi<sup>1</sup> (ovviamente tale parola non viene mai utilizzata!), ottenendo così due classi a seconda che i nastri si ottengano dai rettangoli identificando due lati opposti orientati nello stesso verso oppure in verso opposto;
3. si accenna ad una classificazione più forte<sup>2</sup>, facendo osservare “differenze” o “somiglianze” tra i nastri, una volta che dei loro modelli di carta siano stati tagliati lungo la “circonferenza centrale”.

In questa relazione vorrei concentrare l’attenzione sulla prima fase delle attività, soffermandomi su due aspetti inerenti il ruolo di un insegnante nell’ambito di una didattica di tipo laboratoriale: quello di preparatore di tali attività (elaborazione dei testi delle schede e scelta dei materiali) e quello di osservatore dei ragazzi all’opera che sa aiutarli senza però sostituirsi a loro.

---

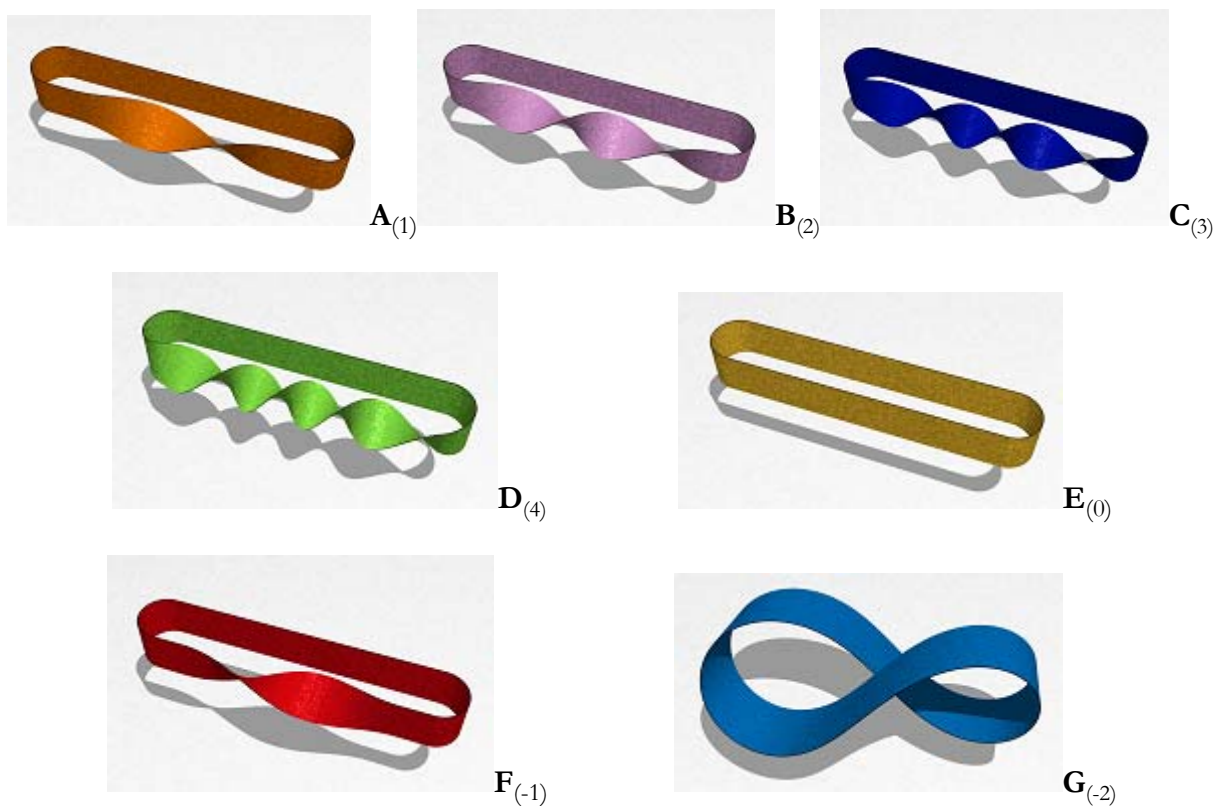
<sup>1</sup> Due oggetti sono tra loro omeomorfi se è possibile ottenere l’uno dall’altro mediante deformazioni continue (stiramenti, compressioni, torsioni, ...) ed eventuali operazioni di “taglia e cuci” che permettano di rincollare l’oggetto, dopo averlo tagliato e manipolato, in maniera tale che i punti originariamente attaccati ritornino tali.

<sup>2</sup> Quella secondo cui due oggetti sono “uguali” se è possibile manipolarli in modo da mandare l’uno nell’altro.

## Materiali

Per le attività si è pensato di mettere a disposizione per ciascun gruppo (costituito da 4-5 ragazzi) i seguenti materiali:

- circa 20 rettangoli di carta lunghi e stretti di varia lunghezza;
- 2 rettangoli di stoffa: uno con le zip orientate in verso opposto, l'altro con le zip orientate nello stesso verso;
- 2 rettangoli trasparenti (5 cm × 50 cm);
- 7 nastri di stoffa chiusi, modelli dei nastri qui sotto illustrati:



Questi 7 nastri sono stati scelti in modo tale che i loro modelli concreti siano oggetti fisicamente diversi e cioè non si possano ottenere l'uno dall'altro per manipolazione.

I nastri sono identificati con una lettera e nelle figure qui sopra anche con un numero intero (non presente nei fogli che si danno ai ragazzi) che rappresenta il numero di mezze torsioni che occorre dare ad un rettangolo prima di identificare due suoi lati per ottenere la superficie illustrata. Il segno di tali numeri dipende dal senso con cui il rettangolo viene fatto ruotare.

## “Sbagliando s’impara”: un esempio

La scheda NASTRI 1 comincia invitando i ragazzi ad osservare le immagini che hanno a disposizione e a prendere confidenza con alcuni loro modelli in stoffa (i 7 di cui sopra).

In realtà nelle sperimentazioni attuate non s’era ancora pensato all’utilizzo di questi modelli di stoffa. Infatti nella prima versione della scheda, sperimentata in una classe seconda di Liceo Socio-psicopedagogico, si invitava a costruire alcuni modelli concreti utilizzando i soli rettangoli di carta messi a disposizione:

Provate a costruire il nastro A attaccando con lo scotch i lati corti di un rettangolo dopo aver dato al rettangolo una mezza torsione. Potete anche andare oltre costruendo un modello per ciascuna immagine: noi vi consigliamo di costruire un modello almeno per i nastri da A a G.

Questa attività è stata inserita affinché i ragazzi costruendo e maneggiando dei modelli concreti cominciassero a prendere familiarità con questo tipo di superfici; e in effetti sono stati costruiti con entusiasmo, e talora con un buon spirito di osservazione, molti dei 14 nastri proposti.

Tuttavia un gruppo partendo dalle strisce di carta contava le torsioni intere invece delle mezze torsioni e così le ragazze giunte a tagliare lungo la circonferenza centrale i nastri di carta – le attività precedenti facevano riferimento ai soli nastri di stoffa con le zip – ottenevano sempre due oggetti essendo tutti i nastri di carta ottenuti con un numero pari di mezze torsioni! Non è pensabile che un insegnante riesca da solo a controllare tutto quello che viene costruito dai ragazzi e così nella successiva sperimentazione, in una classe seconda di un Professionale per i Servizi Commerciali, si è cercato di migliorare il testo della scheda spiegando esplicitamente che cosa si intende per “mezza torsione” e proponendo un ulteriore esempio:

Potete utilizzare i rettangoli di carta lunghi e stretti che avete a disposizione per costruire alcuni modelli concreti: ad esempio potete provare a costruire il nastro A attaccando con lo scotch i lati corti di un rettangolo dopo aver dato al rettangolo una torsione di  $180^\circ$  (chiamiamola “mezza torsione”). Invece per ottenere il nastro B occorre prima dare al rettangolo due mezze torsioni.

In questo modo non si sono ripresentati i problemi della precedente sperimentazione, ma alcune difficoltà (che poi analizzeremo) nel visualizzare le immagini hanno fatto sì che alcuni dei modelli di carta non rappresentassero le immagini volute.

Durante un incontro con i corsisti che si sono occupati del medesimo laboratorio è stato quindi proposto e scelto di mettere a disposizione dei gruppi dei modelli già costruiti su cui basare le attività della prima scheda. In un secondo momento verranno fatti costruire i nastri di carta per

osservarli, tagliarli e ancora osservarli, ma a quel punto del laboratorio già i nastri saranno stati ampiamente analizzati e quindi potranno essere costruiti con maggior consapevolezza.

### Visualizzazione: problemi e sorprese

Una difficoltà con cui fin da subito occorre fare i conti è il fatto che le immagini dei nastri sono bidimensionali e non sempre è facile rendersi conto dell'oggetto tridimensionale che rappresentano. Ad esempio, le figure **L** e **N** potrebbero far pensare allo stesso oggetto tridimensionale (nel senso che il primo oggetto si possa fisicamente manipolare fino a farlo diventare il secondo) ovvero a due nastri ciascuno con tre mezze torsioni.



**L**<sub>(-1)</sub>



**N**<sub>(3)</sub>

In realtà il nastro **L** ha una sola mezza torsione, avendo due mezze torsioni in versi opposti che si annullano. Molti ragazzi (e adulti!) sono stati tratti in inganno da ciò, tuttavia durante la sperimentazione è stato significativo osservare come ben 3 gruppi su 9 avendo costruito i modelli in carta e avendoli maneggiati<sup>3</sup> abbiano osservato che «dopo aver costruito **F** “schiacciando” si ottiene **L**, quindi sono uguali ma visti da punti di vista diversi» oppure «**L** si ottiene da **F** piegando i lati di **F**». In genere questi ragazzi non trovano poi alcuna difficoltà a riconoscere nella immagine **J** un nastro con tre mezze torsioni e a distinguere i nastri **A** e **F** perché «**F** si torce dall'altro lato e quindi risultano opposti».



**J**<sub>(-3)</sub>

Le domande alla fine del punto 1, come la seguente:

Secondo la vostra classificazione sono “uguali” i nastri **A**, **F**?  SI  NO

Spiegate il perché: .....

<sup>3</sup> Nella versione coi 7 nastri di stoffa basta considerare e maneggiare rispettivamente i nastri **F** e **C**.

sono state proposte scegliendo due nastri di cui si ha il modello in stoffa e due di cui si ha soltanto l'immagine e sono state inserite da una parte per verificare la coerenza o meno nella classificazione dei nastri, dall'altra proprio per dare ai ragazzi la possibilità di esplicitare le loro osservazioni. Ritengo infatti che non sia da sottovalutare questo buon spirito di osservazione talora presente in alunni non sempre brillanti nelle consuete attività scolastiche. Forse la proposta di situazioni problematiche che possano essere approcciate con diverse modalità (quindi anche con il ricorso a modelli concreti) può dare a tutti i ragazzi l'occasione di partecipare attivamente all'esperienza senza scoraggiarsi e mettendo in campo capacità che non sempre hanno la possibilità di essere espresse. Se da parte del docente c'è la giusta disponibilità ad osservare tutto quello che di buono o no viene esperito dai ragazzi, potrebbero esserci delle piacevoli sorprese!

### **Libera classificazione**

Come scritto, questa attività è inserita in un laboratorio che ha per tema la classificazione. Nella scheda NASTRI 1, quindi, dopo avere lasciato che i ragazzi familiarizzino coi nastri, si propone di provare a classificare le superfici, scegliendo liberamente un criterio in base al quale suddividere i nastri in gruppetti. Li si lascia dunque LIBERI DI PROVARE, e ciò spesso li spiazza, in primo luogo perché non viene dato un esercizio con delle regole da applicare, in secondo luogo perché in questa attività non c'è una risposta "giusta o sbagliata", gli unici possibili errori possono nascere dall'incoerenza tra il criterio di classificazione scelto e la relativa suddivisione in classi (e a questo occorre invitarli a prestare attenzione). In questo contesto possono essere frequenti domande del tipo «*in che modo devo fare?*» oppure «*sto facendo giusto?*» ed è perciò importante rassicurarli valorizzando i loro pensieri e comunicando a loro il senso che "ce la possono fare".

Può essere interessante annotare qui i criteri di classificazione scelti dai 9 gruppi con cui è stata fatta la sperimentazione:

- classificazione in base al numero di mezze torsioni, indipendentemente dal loro verso (5)
- classificazione a seconda che le immagini dei nastri appaiano "torte" o "appiattite"<sup>4</sup> (2)
- classificazione a seconda che i nastri, una volta costruiti, si possano ottenere l'uno dall'altro (2)

Quest'ultimo criterio di classificazione è stato scelto in modo naturale da 2 dei 3 gruppi che hanno osservato quanto precedentemente raccontato (il terzo ha optato per il numero di mezze torsioni) ed essendo più fine ha comportato che questi ragazzi impiegassero più tempo (e attenzione) nel suddividere in classi i nastri.

---

<sup>4</sup> In questo caso il cilindro E fa classe a sé.



Può non essere semplice per un insegnante seguire tutte le varie classificazioni proposte dai gruppi, in particolare quando tale classificazione non è facile; ad esempio ancora oggi non sono poi così sicura di individuare quale tra i seguenti nastri è fisicamente come il cilindro normale e quale, invece, è come quello ottenuto con due mezze torsioni!



**K**



**M**

Tuttavia è indispensabile lasciarsi coinvolgere da momenti di ricerca insieme agli alunni, senza avere il timore di doversi confrontare con situazioni difficili o che sembrano fuori dal nostro controllo: il più delle volte gli alunni sono ben contenti di sentirsi collaboratori di una persona più esperta di loro che, pur non conoscendo la risposta ai problemi che si presentano, li accompagna nella costruzione di un sapere comune.

### **Allegati**

1. Scheda NASTRI 1
2. Scheda NASTRI 2
3. Immagini dei nastri