Geometria 2

Prof. Antonio Lanteri
Anno accademico 2011-2012, secondo semestre

Obiettivo del corso è completare il background di algebra lineare presentando alcuni concetti fondamentali di questa teoria, nonché introdurre alla geometria degli spazi proiettivi, affini ed euclidei, sviluppando la capacità di trattare problemi geometrici nel contesto più adeguato.
Il corso consiste di due parti. Nella prima si continuerà lo studio dell'algebra lineare, iniziato nel corso di Geometria 1, sviluppando diversi argomenti che, nella seconda parte, verranno utilizzati per fondare la teoria degli spazi proiettivi, affini ed euclidei, in ogni dimensione, e per studiare la geometria degli enti lineari e quadratici in tutti questi ambienti.

Programma in italiano

1. Endomorfismi di spazi vettoriali e loro forme canoniche
Cambiamento della matrice rappresentativa di un'applicazione lineare al cambiare delle basi. Matrici equivalenti e matrici simili. Autovalori e autovettori. Polinomio caratteristico di un endomorfismo (di una matrice). Autospazi e sottospazi invarianti. Caratterizzazione degli endomorfismi diagonalizzabili e di quelli triangolarizzabili. Forma canonica di Jordan. Polinomi e autovalori. Teorema di Cayley-Hamilton. Polinomio minimo.
2. Spazi vettoriali euclidei
Prodotti interni in spazi vettoriali reali e complessi. Norma; angoli; ortogonalità; basi ortonormali; procedimento di Gram-Schmidt. Isometrie e gruppo ortogonale. Endomorfismi simmetrici e loro ortodiagonalizzazione (teorema spettrale reale). Cenno al caso complesso.
3. Forme bilineari e quadratiche
Forme multilineari. Forme bilineari; matrici congruenti. Forma quadratica associata ad una forma bilineare simmetrica. Basi coniugate; riduzione a forma canonica di una forma quadratica. Forme quadratiche reali. Teorema di Sylvester. Forme definite, semidefinite, indefinite. Spazi vettoriali pseudoeuclidei. Forme quadratiche complesse.
4. Geometria in spazi n-dimensionali su un campo arbitrario
Spazi affini. Riferimenti affini. Sottospazi lineari affini e loro rappresentazioni. Parallelismo. Trasformazioni. Spazi affini euclidei; distanze, angoli, volumi. Teorema di Eulero e forma canonica delle rotazioni. Spazi proiettivi. Motivazioni. Sottospazi lineari e loro rappresentazioni. Formula di Grassmann. Teorema fondamentale della geometria proiettiva. Lo spazio affine complementare di un iperpiano. Proiettività e affinità.
5. Quadriche e coniche
Le coniche nel piano euclideo, affine e proiettivo. Quadriche e iperquadriche dal punto di vista proiettivo reale/complesso: polarità; punti singolari; riducibilità; spazi lineari; natura dei punti di una superficie quadrica; classificazioni. Iperquadriche nello spazio affine. Chiusura proiettiva. Comportamento rispetto all'iperpiano improprio. Classificazione affine reale e complessa. Iperquadriche nello spazio euclideo. Invarianti ortogonali. Classificazione euclidea-metrica delle coniche e delle quadriche.
6. La dualità
Duale di uno spazio vettoriale. Base duale. Omomorfismo trasposto. Sottospazi annullatori e loro proprietà. Principio di dualità in geometria proiettiva e sua illustrazione attraverso esempi elementari. Inviluppi aderenti.

Programma in inglese

1. Vector space endomorphisms and canonical forms
Effect of change of basis on the matrix representing a linear map. Equivalent and similar matrices. Eigenvalues and eigenvectors. Characteristic polynomial of an endomorphism (of a matrix). Eigenspaces and invariant subspaces. Characterization of diagonalizable and triangulable endomorphisms. Jordan's canonical form. Polynomials and eigenvalues. Cayley-Hamilton's theorem. Minimal polinomial.
2. Euclidian vector spaces
Inner products in real and complex vector spaces. Norm; angles; orthogonality; orthonormal bases; Gram-Schmidt process. Isometries and the orthogonal group. Symmetric endomorphisms and their properties (the real spectral theorem). A look at the complex case.
3. Bilinear and quadratic forms
Multilinear forms. Bilinear forms; congruent matrices. The quadratic form associated to a symmetric bilinear form. Conjugate bases; reducing a quadratic form to canonical form. Real quadratic forms. Sylvester's theorem. Definite, semi-definite, indefinite real quadratic forms. Pseudo-euclidian vector spaces. Complex quadratic forms.
4. Geometry in n-dimensional spaces over an arbitrary field
Affine spaces. Frames. Affine linear varieties and their analytic representations. Parallelism. Affine transformations. Euclidean affine spaces; distance, angles, volumes. Euler's theorem and canonical form of rotations. Projective spaces. Motivations. Projective linear varieties and their representations. Grassmann's formula. The main theorem of projective geometry. The affine space complementing a hyperplane. Projective transformations and affine transformations.
5. Quadrics e conics
Conics in the Euclidean, affine, and projective planes. Quadric hypersurfaces from the real/complex projective point of view: polarity; singular points; reducibility; linear spaces; the nature of points of a real quadric surface; classifications. Quadric hypersurfaces in affine space. Projective closure. Behaviour with respect to the hyperplane at infinity. Affine classification from the real and complex point of view. Quadric hypersurfaces in Euclidian space. Orthogonal invariants. Classification of conics and quadric surfaces from the euclidian-metric point of view.
6. Duality
Dual of a vector space. Dual basis. Transpose of a linear map. Annihilators and their properties. The duality principle in projective geometry illustrated trough elementary examples. Envelopes.

Propedeuticità consigliate

Geometria 1

Materiale di riferimento

E. Sernesi, Geometria I, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.
M.I. Stoka, Corso di Geometria (Terza Ediz.), Cedam, Padova, 1995.
M. Artin, Algebra, Bollati Boringhieri, Torino, 1997

Prerequisiti

Gli argomenti di Matematica presentati nel precorso e nei corsi del primo semestre