Superfici Algebriche

Prof. Antonio Lanteri
Anno accademico 2010-2011, secondo semestre

La teoria delle superfici algebriche proiettive complesse è riconosciuta universalmente come una delle più grandi conquiste della ricerca matematica italiana. Essa è dovuta principalmente allo sforzo congiunto di Castelnuovo ed Enriques, che partendo dai primi risultati pionieristici di Max Noether, pervennero, con un lavoro intenso di alcuni decenni, alla classificazione birazionale delle superfici. Il compendio organico di questa costruzione è il volume di Enriques "Le superficie algebriche", pubblicato postumo nel 1949. Ma la teoria, già delineata da Castelnuovo ed Enriques in una lunga serie di lavori, ha continuato ad esercitare un fascino notevole su molti matematici di grande statura. Negli anni '40, Zariski lavorò alla sua algebrizzazione, continuata poi da Shafarevich negli anni '60. Negli anni '50 Kodaira la sviluppò, ricostruendola nel contesto più vasto delle superfici complesse compatte; negli anni '70 Mumford e Bombieri la estesero a superfici algebriche definite su un campo di caratteristica positiva. E ancora oggi l'interesse è più vivo che mai, soprattutto in relazione agli sviluppi introdotti da Mori e Kawamata nello studio delle varietà algebriche di dimensione superiore. L'eleganza e la complessità della teoria delle superfici hanno anche stimolato molti autori, a partire dagli anni '60, a riprendere la materia, sviluppandola in forma di monografia o come sostanzioso capitolo in importanti trattati di geometria algebrica.

Nel corso si intende fornire un'introduzione alla geometria delle superfici algebriche proiettive complesse, offrendo una rivisitazione della teoria classica (Castelnuovo-Enriques) nel quadro della geometria algebrica contemporanea. Sia S una superficie algebrica proiettiva complessa non singolare. La questione fondamentale è se il fibrato canonico K_S di S sia o meno nef (numericamente effettivo), cioè; se risulti o meno $K_S \cdot C \geq 0$ per ogni curva irriducibile C in S. Il fatto che $K_S \cdot C$ sia negativo per qualche curva C può essere accidentale o sostanziale. Nel primo caso, la teoria insegna che a meno di sostituire S con una opportuna superficie S', ad essa birazionale, detta modello minimale, si ha che $K_{S'}$ è nef; nel secondo caso, invece, ciò non è possibile. Il risultato centrale di Castelnuovo-Enriques è la scoperta che questa seconda circostanza si presenta (se e) soltanto se S è una superficie rigata, cioè birazionalmente equivalente ad un prodotto di una curva liscia con una retta proiettiva. Equivalentemente, su una superficie minimale non rigata, il fibrato canonico è nef. Per il ruolo centrale che riveste nella teoria, questa affermazione è oggi designata in letteratura come lemma chiave.

Uno degli obiettivi principali del corso sarà questo lemma, di cui si fornirà una dimostrazione basata sul teorema di razionalità di Kawamata. E particolare enfasi sarà posta proprio su questo risultato, che deriva direttamente dagli sviluppi connessi allo studio della geometria birazionale delle varietà di dimensione superiore a 2. Si tratta di un punto di vista emerso negli anni '90, accennato in forma più o meno succinta in alcuni lavori di quegli anni (Peters, Wilson, Reid), diffusosi poi grazie a corsi di ricerca impartiti in ambito internazionale e che ora incomincia a trovare spazio nei trattati.

Programma in italiano

1. Materiale di base
Varietà analitiche complesse. Applicazioni olomorfe e meromorfe. Sottovarietà. Divisori e fibrati lineari olomorfi. Fibrato canonico. Varietà algebriche proiettive. Grado e dimensione. Esempi. Sistemi lineari. Cenni su alcuni risultati generali. Fibrati ampi e loro proprietà. Richiami sulla teoria delle curve.

2. Primi elementi della teoria delle superfici algebriche proiettive
Generalità sulle superfici complesse compatte. Caratteri numerici. Superfici algebriche; esempi. Curve su una superficie. Teoria dell'intersezione su una superficie algebrica. Interpretazione topologica. Gruppo di Neron-Severi ed equivalenza numerica. Teorema di Riemann-Roch, formula di Noether. Formula del genere. Genere aritmetico di un divisore.

3. Il cono delle curve
Il teorema dell'indice di Hodge. Interpretazione nello spazio degli R-divisori modulo equivalenza numerica. Criterio di Nakai-Moishezon. Il cono ampio. Divisori nef. Il cono nef come chiusura del cono ampio. Il cono di Mori e il criterio di Kleiman. Illustrazione dei vari coni su esempi notevoli. Soglia nef di un divisore ampio e teorema di razionalità di Kawamata.

4. Applicazioni birazionali e modelli minimali
Applicazioni razionali e sistemi lineari. Applicazioni birazionali. Esempi. Scoppiamenti e loro proprietà. Il teorema di contrazione di Castelnuovo. Esempi. Struttura dei morfismi birazionali. Invarianti birazionali. Modelli minimali. Superfici rigate e fibrazioni in curve razionali. Il teorema di Enriques sui modelli minimi.

5. Superfici rigate e razionali
Caratteri numerici delle superfici rigate e razionali. Criterio di razionalità di Castelnuovo. Modelli minimali delle superfici rigate e razionali. Numerica effettività del fibrato canonico sulle superfici minimali non rigate (lemma chiave). Il teorema di Enriques. Caratterizzazione delle superfici rigate in termini di aggiunzione. La superficie cubica. Superfici di Del Pezzo.

6. Superfici non rigate
Dimensione di Kodaira. Comportamento dei plurigeneri ed altri aspetti della tricotomia. Esempi. Caratteri numerici delle superfici con dimensione di Kodaira zero. Cenni sulle superfici ellittiche e sulle superfici di tipo generale. Esempi.

Riferimenti:

A. Beauville, Complex Algebraic Surfaces, Second Edition, Cambridge Univ. Press, 1996.
Ph. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley & Sons, New York, 1978.
V. Iskovskih, I. R. Shafarevich, Algebraic Surfaces, in Enc. Math. Sci., vol. 35, Springer, Berlin, 1996.
Ch. Peters, Introduction to the Theory of Compact Complex Surfaces, Canad. Math. Soc. Confer. Proc., vol. 12, pp. 129-156, 1992.
M. Reid, Chapters on Algebraic Surfaces, in J. Kollár (ed.), Complex Algebraic Geometry, IAS/Park City Math. Ser., vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1997.

Programma in inglese

1. Background material
Complex manifolds. Holomorphic and meromorphic maps. Subvarieties. Divisors and holomorphic line bundles. The canonical bundle. Projective algebraic varieties. Degree and dimension. Examples. Linear systems. Some general results. Ample line bundles and their properties. Basics from the theory of curves.

2. Basics of the theory of projective algebraic surfaces
Generalities on compact complex surfaces. Numerical characters. Algebraic surfaces: examples. Curves on a surface. Intersection theory on an algebraic surface. Topological interpretation. The Néron-Severi group and numerical equivalence. The Riemann-Roch theorem, Noether's formula. Genus formula. Virtual arithmetic genus of a divisor.

3. The cone of curves
The Hodge index theorem. Interpretation in the real Néron-Severi space. The Nakai-Moishezon criterion. The ample cone. Nef divisors. The nef cone viewed as closure of the ample cone. The Mori cone and Kleiman's criterion. Remarkable examples illustrating the various cones. Nef treshold of an ample divisor and Kawamata's rationality theorem.

4. Birational maps and minimal models
Rational maps and linear systems. Birational maps. Examples. Blowing-ups and their properties. Castelnuovo's contraction theorem. Examples. The structure of birational morphisms. Birational invariants. Minimal models. Ruled surfaces and fibrations in rational curves. Enriques' theorem on minimal models.

5. Ruled and rational surfaces
Numerical characters of ruled and rational surfaces. Castelnuovo's rationality criterion. Minimal models of ruled and rational surfaces. Numerical effectiveness of the canonical bundle on a nonruled minimal surface (key lemma). Enriques' ruledness criterion. Characterizations of ruled surfaces via adjunction. The cubic surface. Del Pezzo surfaces.

6. Nonruled surfaces
Kodaira dimension. Behaviour of the plurigenera and other aspects of the tricothomy. Examples. Numerical characters of surfaces with Kodaira dimension zero. A glance at elliptic surfaces and surfaces of general type. Examples.