Geometria 2

Homework del 15 maggio 2012

Risoluzione

1) Sia $B \in S$ un punto arbitrario. Allora $S = L(B, \mathrm{Dir}\, S)$, mentre $T = L(A, (\mathrm{Dir}\, S)^\perp)$. Si denoti con V lo spazio vettoriale che agisce per traslazioni su $\mathbf{E}^n$. Dal momento che $V = \mathrm{Dir}\, S \oplus (\mathrm{Dir}\, S)^\perp$, ogni vettore di V si esprime in modo unico nella forma $\underline{u} + \underline{v}$, con $\underline{u} \in \mathrm{Dir}\, S$ e $\underline{v} \in (\mathrm{Dir}\, S)^\perp$. Ciò vale in particolare per il vettore $B - A$. Poniamo $P := A + \underline{v}$. Allora $P \in T$. Dalla relazione

$$(B - P) + (P - A) = B - A = \underline{u} + \underline{v}$$

segue inoltre che $P = B - \underline{u}$, per cui si ha anche $P \in S$. Dunque $P \in S \cap T$ e in effetti $S \cap T = \{P\}$, dato che $\mathrm{Dir}\, S \cap (\mathrm{Dir}\, S)^\perp = \{\underline{0}\}$. Ciò prova a). Per provare b) basta notare che

$$d(A, B) = \|\underline{u} + \underline{v}\| = \sqrt{\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2},$$

dato che $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono ortogonali. Si noti che $\underline{v} \neq \underline{0}$, dato che per ipotesi $A \notin S$ e quindi $P \neq A$. Dal momento che $d(A, P) = \|\underline{v}\|$ (> 0), la relazione precedente comporta $d(A, B) = d(A, P)\sqrt{1 + \alpha^2}$, dove $\alpha = \|\underline{u}\|/\|\underline{v}\|$. Ne viene che $d(A, B) \geq d(A, P)$ per ogni $B \in S$, valendo il segno $=$ se e soltanto se $\alpha = 0$, cioè $\underline{u} = \underline{0}$, o, equivalentemente, $B = P$.

2) Per il teorema di Eulero sulle rotazioni in $\mathbf{E}^3$, R è ortogonalmente simile alla matrice

$$R' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, $\mathrm{Tr}\, R = \mathrm{Tr}\, R' = 2\cos\theta + 1$.

3) In forma parametrica omogenea si ha $\Lambda = \{(a : b : a + 2c : b + c : a : b + 2c)\}$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, per cui mettendo a sistema con le equazioni di Σ si conclude che $\Lambda \cap \Sigma$ è il punto $D \equiv (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1)$. Dalla relazione di Grassmann segue allora che $\Lambda + \Sigma$ è l'intero $\mathbf{P}^5$ e ciò conclude a). Per rispondere a b), osservato che $C \notin \Sigma$, dalla relazione di Grassmann segue che $\dim \Pi = 4$ e basta quindi cercare l'iperpiano del fascio di sostegno Σ che passa per C. Rappresentando il fascio di iperpiani nella forma

$$\lambda(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) + \mu(x_2 - x_3 + x_4 - x_6) = 0,$$

con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ la condizione di passaggio per C comporta $\lambda - 3\mu = 0$, per cui Π risulta descritto dall'equazione $3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_6 = 0$.

4) Per la relazione di Grassmann, H taglia Λ_i lungo una retta ℓ_i $(i = 1, 2)$ e $\ell_1 \cap \ell_2 = \{P\}$ per le ipotesi fatte. a) Dato che H svolge per $\mathcal{A}$ il ruolo di piano improprio, la condizione $L_1 \parallel L_2$ equivale a $\ell_1 = \ell_2$, ma ciò è falso. Questo risponde ad a). Per rispondere a b) basta considerare come r_i la traccia affine di una retta in Λ_i passante per P e distinta da ℓ_i. È chiaro allora che in $\mathcal{A}$ le rette r_1 e r_2 sono parallele, avendo P come comune punto all'infinito.