Geometria 2
Homework del 10 maggio 2010
Risoluzione

1) a) Si scriva l'equazione di ω nella forma $x' = (ax+b)/(cx+d)$ con $ad - bc \neq 0$; dalle condizioni richieste si trae subito che $x' = 1/(1-x)$. b) Quindi si ha $\omega(D) = (-1 : 1)$. c) I punti uniti sono determinati dalle soluzioni dell'equazione $x^2 - x + 1 = 0$, per cui lavorando sul campo complesso, risultano essere i due punti $(1 \pm i\sqrt{3} : 2)$. d) Dato che ω^3 fissa i tre punti A, B e C segue immediatamente che è l'identità.

2) Detti λ e μ gli autovalori di f, a meno di scambiarli si ha che μ è doppio ed f è descritto in un'opportuna base $\{a_1, a_2, a_3\}$ dalla matrice (forma canonica di Jordan)

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Ad esempio, sia $\ell \subset \mathbf{P}^2$ la retta corrispondente al sottospazio invariante $U = \langle a_2, a_3 \rangle$. Poichè $f(U) = U$ si ha $\omega(\ell) = \ell$. Perciò, posto $\mathcal{A} := \mathbf{P}^2 \setminus \ell$ si ha che $\omega|_{\mathcal{A}}$ è un'affinità. Si tratta di una centroaffinità il cui centro è il punto corrispondente all'autospazio di f relativo a λ.

3) a) Sia S il sottospazio lineare generato da due delle tre rette; a meno di scambi possiamo assumere $S := \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$. Supponiamo innazitutto $\dim S = 3$. Allora $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$, per Grassmann. La retta ℓ_3 interseca S in un punto A, oppure vi giace interamente. Nel primo caso le tre rette generano $\mathbf{P}^4$ e si hanno due possibilità: il punto A non giace su alcuna delle due rette ℓ_1, ℓ_2, i. e. le rette sono sghembe a due a due; si noti che tutte queste situazioni sono proiettivamente equivalenti essendo determinate da sei punti (due per ciascuna retta) di $\mathbf{P}^4$ a 5 a 5 linearmente indipendenti (I config., che è la più generale). Oppure A giace su una (e una sola) delle due rette (II config., a meno di scambiare ℓ_1 con ℓ_2). Se invece $\ell_3 \subset S$, allora le tre rette generano un $\mathbf{P}^3$ e si hanno le seguenti possibilità: ℓ_3 è sghemba sia rispetto a ℓ_1 che a ℓ_2, i.e., le tre rette sono sghembe a due a due (III config.), oppure ℓ_3 incide una sola delle due rette (IV config., a meno di scambiare ℓ_1 con ℓ_2), oppure ancora le incide entrambe, ovviamente in punti distinti (V config.) Sia ora $\dim S = 2$. In tal caso $\ell_1 \cap \ell_2$ è un punto: sia B. Allora si hanno le seguenti possibilità: ℓ_3 non interseca S, e si ricade nella II configurazione (ad es. con ℓ_1, ℓ_3 in luogo delle precedenti ℓ_1, ℓ_2). Possiamo assumere perciò che ℓ_3 tagli S, dato che per ipotesi non può esservi contenuta. Poniamo allora $S \cap \ell_3 = C$. Può essere $C \notin \ell_1 \cup \ell_2$ e si ricade nella IV configurazione, oppure $C \in \ell_i \setminus \{B\}$ con $i = 1$ o 2 e si ricade nella V configurazione, oppure ancora $C = B$ (VI config.). b) Parametrizzando le tre rette date con $(\lambda : 0 : \mu : \mu : \mu)$, $(\alpha : \beta : 0 : \beta : \beta)$ e $(b : a : -2a : 0 : a)$ rispettivamente, si riconosce subito che esse non sono complanari. c) È immediato verificare che $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3 = \{(1 : 0 : 0 : 0 : 0)\}$ per cui il caso rientra nella VI configurazione.

4) Parametrizzando Λ con $(a : a : b : c : c : d)$ e ℓ con $(\lambda : \mu : 0 : \mu : \lambda : 0)$ rispettivamente, si osserva subito che $\Lambda \cap \ell$ è il punto $A = (1 : 1 : 0 : 1 : 1 : 0)$. Affinchè nello spazio affine complementare di un iperpiano Π (non contenente nessuno dei due sottospazi) la traccia di ℓ risulti parallela a quella di Λ, basta dunque che Π contenga A. Ad es. si può scegliere l'iperpiano Π di equazione $x_2 - x_5 = 0$ (ma non quello di equazione $x_3 = 0$, dato che contiene ℓ).