Geometria 2

15 maggio 2012

Homework

l'elaborato è da restituire giovedì 17 maggio, nell'orario di esercitazioni

1) Nello spazio euclideo n-dimensionale $\mathbf{E}^n$ siano dati un sottospazio lineare proprio S ed un punto $A \notin S$. Sia $T \subset \mathbf{E}^n$ il sottospazio lineare univocamente definito dalle condizioni seguenti: i) $T \ni A$, ii) $\mathrm{Dir}\, T = (\mathrm{Dir}\, S)^{\perp}$. Si mostri che:
a) $T \cap S$ consiste di un unico punto P;
b) $d(A, P) = \min_{B \in S} d(A, B)$, dove d denota la distanza euclidea.

2) Sia a l'asse della rotazione di $\mathbf{E}^3$ rappresentata, in un sistema di riferimento ortonormale, da una matrice $R \in \mathrm{SO}(3)$. Si mostri che l'angolo θ della rotazione indotta sul piano per l'origine ortogonale ad a soddisfa la condizione

$$2\cos\theta + 1 = \mathrm{Tr}\, R.$$

3) Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^5$ si considerino i seguenti sottospazi lineari: Λ, generato dai punti

$$A \equiv (1:0:1:0:1:0), \quad B \equiv (0:1:0:1:0:1), \quad C \equiv (0:0:2:1:0:2),$$

e Σ, descritto dalle equazioni

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 0.$$

a) Si determinino i sottospazi lineari $\Lambda \cap \Sigma$ e $\Lambda + \Sigma$;
b) si descriva mediante equazioni cartesiane omogenee il sottospazio lineare Π generato da Σ e C.

4) In $\mathbf{P}^4$ siano dati due piani Λ_1, Λ_2 aventi in comune soltanto il punto P e si consideri un iperpiano H passante per P, non contenente Λ_1 nè Λ_2. Posto $\mathcal{A} := \mathbf{P}^4 \setminus H$, si denoti con L_i la traccia affine di Λ_i in $\mathcal{A}$ ($i = 1, 2$).
a) Si stabilisca se $L_1 \parallel L_2$;
b) si stabilisca se esistono rette $r_i \subset L_i$, $i = 1, 2$ tali che $r_1 \parallel r_2$.

N.B. *Tutti i risultati devono essere giustificati con brevi e chiare spiegazioni.*