<u>Geometria 2</u>

28 aprile 2011

Prova intermedia

1. Sia $V = \mathbf{K}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3 in una indeterminata a coefficienti nel campo $\mathbf{K}$ e sia $f : V \to V$ l'applicazione definita ponendo

$$f(at^3 + bt^2 + ct + d) = ct^3 + dt^2 + at + b,$$

per ogni polinomio $at^3 + bt^2 + ct + d \in V$.

(a) Si determinino gli autospazi di f e si stabilisca se f è diagonalizzabile;

(b) si determini il polinomio minimo di f.

2. Determinare la forma canonica di Jordan della matrice

$$B_k = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 3 & 0 & k & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

in funzione del parametro $k \in \mathbf{R}$.

3. Sullo spazio vettoriale $V = \mathbf{R}^3$ si consideri la forma quadratica

$$\Phi(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la segnatura di Φ;

(b) si determini una matrice $R \in \mathrm{SO}(3)$ tale che $A = R\Delta R^{-1}$ dove Δ è una matrice diagonale.

4. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale euclideo e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale tale che $T(U) \subseteq U$.

(a) Mostrare che $T(U^\perp) \subseteq U^\perp$;

(b) se inoltre T è biiettivo, mostrare che $T(U^\perp) = U^\perp$.

N.B. *Tutti i risultati devono essere giustificati con brevi e chiare spiegazioni.*