

Geometria 2
23 aprile 2012
Prova intermedia

1. Sia $W = M(2, K)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a elementi in un campo K e sia $g : W \rightarrow W$ l'applicazione definita ponendo

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -d & c \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

per ogni matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$.

- (a) Si verifichi che g è un endomorfismo di W ;
 - (b) se ne determinino gli autospazi e si stabilisca se g è diagonalizzabile;
 - (c) si determini il polinomio minimo di g .
2. Determinare, al variare del parametro reale b , la forma canonica di Jordan della matrice

$$M_b = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ -2 & -b & b & b \end{bmatrix}.$$

3. Si considerino le matrici simmetriche reali

$$A_k = \begin{bmatrix} 6 & k & 0 \\ k & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 3-k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

e l'endomorfismo ω di \mathbf{R}^3 definito da

$$\omega(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \omega(\mathbf{e}_2) = h\mathbf{e}_2 + (h-1)\mathbf{e}_3, \quad \omega(\mathbf{e}_3) = 4\mathbf{e}_3,$$

con h e k parametri reali.

- (a) Si dica per quali valori del parametro reale k le matrici A_k e B rappresentano la stessa forma quadratica su \mathbf{R} e su \mathbf{C} .
 - (b) Si determini una matrice ortogonale che diagonalizza A_2 .
 - (c) Si dica se esistono valori del parametro h per cui l'endomorfismo ω è simmetrico rispetto al prodotto interno di \mathbf{R}^3 individuato dalla matrice B .
4. Si consideri il prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su \mathbf{R}^3 , definito da $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}_T D \mathbf{v}$, con

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esibire una base ortogonale del sottospazio Z di \mathbf{R}^3 , dove Z è il complemento ortogonale del vettore \mathbf{e}_3 .

N.B. *Tutti i risultati devono essere giustificati con brevi e chiare spiegazioni.*