Geometria 2

30 aprile 2015

Prova intermedia

1. Detto $V = M(2, \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a elementi reali, si consideri l'endomorfismo $f : V \to V$ definito ponendo
$$f(A) = A + 3A_T,$$
per ogni $A \in V$, dove A_T denota la trasposta di A.
   (a) Determinare autovalori ed autospazi di f.
   (b) Stabilire se f è diagonalizzabile.
   (c) Generalizzare quanto sopra al caso in cui $V = M(n, \mathbf{R})$ è lo spazio vettoriale delle matrici quadrate $n \times n$ a elementi reali.

2. In $M(4; \mathbf{R})$ si considerino le due matrici
$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad N = \begin{pmatrix} O & U \\ U & O \end{pmatrix},$$
dove, nella seconda, O e U denotano sottomatrici 2×2, con O matrice nulla, e U matrice nilpotente non nulla. Determinare eventuali valori del parametro reale a per i quali le matrici M_a e N sono simili.

3. Sia V uno spazio vettoriale tridimensionale su un campo $\mathbf{K}$ e su V si considerino le forme quadratiche definite rispettivamente (tramite isomorfismi con $\mathbf{K}^3$) dalle matrici
$$A_h = \begin{pmatrix} 6 & 0 & h-1 \\ 0 & h & 0 \\ h-1 & 0 & h \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
al variare del parametro $h \in \mathbf{K}$.
   (a) Posto $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, stabilire per quali valori di h A_h e B definiscono la stessa forma quadratica su V;
   (b) posto $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, stabilire per quali valori di h A_h e B definiscono la stessa forma quadratica su V;
   (c) posto $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ e $h = 2$, determinare una base di $\mathbf{Q}^3$ rispetto alla quale la forma quadratica definita da A_2 si esprime in forma canonica.

4. Nello spazio affine euclideo $\mathbf{E}^4$ sono dati il piano π di equazioni $x - y + w = x + z - w = 0$ e la retta r passante per i punti $A \equiv (1, -1, 0, 1)$ e $B \equiv (2, -1, 1, 0)$.
   (a) Dopo avere verificato che r e π sono sghembi, calcolare la (minima) distanza tra r e π.
   (b) Sia r' la retta tagliata su π dall'iperpiano di equazione $y + 1 = 0$ e su di essa si consideri il punto $C \equiv (-1, -1, 1, 0)$. Determinare i punti $D \in r'$ tali che il tetraedro di vertici A, B, C, D abbia volume (in senso elementare) $\frac{3}{2}$.

N.B. *Tutti i risultati devono essere giustificati con brevi e chiare spiegazioni.*