Geometria 2
26 aprile 2017
Prova intermedia

1. Sia $V = M(2, \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia $f : V \to V$ l'applicazione definita da
$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}.$$
   (a) Verificare che f è un endomorfismo di V.
   (b) Determinare gli autospazi di f e stabilire se f sia diagonalizzabile.
   (c) Determinare il polinomio minimo di f.

2. Si considerino le due matrici
$$A_h = \begin{bmatrix} h & 2 & h+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & h-1 & h-1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B_h = \begin{bmatrix} h & 1 & h+1 \\ 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 2h \end{bmatrix},$$
dove h è un parametro reale.
   (a) Stabilire per quali valori di h, tali due matrici sono equivalenti.
   (b) Determinare eventuali valori di h per i quali le due matrici risultano simili.

3. Sia $\mathbf{K}$ il campo reale o complesso e sia $\varphi : \mathbf{K}^3 \times \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}$ la forma bilineare simmetrica definita rispetto alla base canonica dalla matrice
$$A_k = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} \qquad (k \in \mathbf{K}).$$
   (a) Supposto $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, determinare la segnatura della forma quadratica associata a φ, in dipendenza dal parametro k.
   (b) Supposto $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ e posto $k = 0$, determinare una matrice $X \in \mathrm{SO}(3)$ che diagonalizza A_0.
   (c) Per $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$ rispettivamente, stabilire per quali valori del parametro k esiste una matrice $C \in \mathrm{GL}(3, \mathbf{K})$ tale che $A_k = C_T C$.

4. Nello spazio affine euclideo $\mathbf{E}^4$, munito di un riferimento ortonormale con origine O, si considerino il piano π di equazioni $x + y - z = x - y - w = 0$ e la retta r passante per i punti $A \equiv (2, 1, 1, 0)$ e $B \equiv (2, 2, 0, 1)$.
   (a) Verificare che r e π sono sghembi e calcolare la (minima) distanza tra r e π.
   (b) Si considerino la retta r', tagliata su π dall'iperpiano H di equazione $x - 2 = 0$, e il punto $C \equiv (2, 1, 2, 0)$. Determinare un punto $D \in r'$ in modo che il tetraedro di vertici A, B, C, D abbia volume (in senso elementare) $\frac{1}{2}$.
   (c) Si calcoli l'ipervolume (in senso elementare) del 4-simplesso di vertici O, A, B, C, D.

N.B. *Tutti i risultati devono essere giustificati con brevi e chiare spiegazioni.*