Cognome............................ **Nome**....................... **Matricola**..................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (prova scritta)

10 luglio 2015 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione A

1] (4 pt.) Sia

$$z = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{3i}.$$

Scrivere z in forma trigonometrica e determinare il più piccolo $k \in \mathbb{N}$ tale che $\mathrm{Im}\,(z^k) = 0$.

Soluzione:

2] (4 pt.) Sia

$$f(x) = \log|x| - \frac{1}{x}\,.$$

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare il numero degli elementi distinti dell'insieme $f^{-1}(a)$.
Soluzione:

3] (4 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano

$$a_n = \Big(\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n} + 1\Big)^n + \frac{\log n}{\log 2n}\,.$$

Allora: $\limsup_{n\to+\infty} a_n =$ .... ; $\liminf_{n\to+\infty} a_n =$ ....

4] (4 pt.) Stabilire, per quali $a \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(a-2)^n \log^a n}{n}$$

specificando per quali a la convergenza è assoluta.

Soluzione:

5] (4 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tre volte derivabile e tale che, per $x \to -1$,

$$f(x) = 3a + (a^3 - a^2 - 12a)(x+1) - (a^3 - 4a)(x+1)^2 + (a^2+5)(x+1)^3 + o\big((x+1)^3\big)$$

Stabilire per quali a il grafico di f presenta, nel punto di ascissa -1, uno dei seguenti comportamenti (specificando quale): massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.

Soluzione:

6] (4 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, siano

$$A_n = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; -2 - \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \;\; , \;\; -\frac{1}{n} < y < 2 - \frac{1}{n} \; \Big\} ,$$

$C = \{ (4 + \frac{1}{k} \, , \, 0) \; : \; k \in \mathbb{N} \}$ e $E = A_1 \cup C$. Allora

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Big\}$$

$$\overset{\circ}{E} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{E} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7] (6 pt.) Sia

$$a_n = n \sin \big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \big) - \cos \big(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \big) \, .$$

a) Determinare $c, p \in \mathbb{R}$ tali che, per $n \to +\infty$, sia $a_n \sim c \, n^p$.

b) Calcolare poi, se esiste,

$$\lim_{n \to +\infty} (1 - a_n)^{n \log(n^5 + e^{2n})} \, .$$

Scrivere uno svolgimento completo.