Cognome.............................. **Nome........................** **Matricola..................**

Desidero sostenere la prova orale Martedì 2 febbraio $\boxed{\text{sì}}$ oppure successivamente $\boxed{\text{sì}}$

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (prova scritta)

27 gennaio 2016 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione A

1] (4 pt.) Stabilire per quali valori del parametro reale a è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\left(3^n + n^3\right)}{n^{3a}\left(3^{2/n} - 1\right)}\,.$$

Soluzione:

2] (4 pt.) Sapendo che la funzione

$$f(x) = \arctan\left(3 - 4e^{2x}\right) - x$$

è strettamente monotona su $\mathbb{R}$, detta g la sua inversa, calcolare

$g'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ [Ricordare che $\arctan(\pm 1) = \pm\pi/4$].

3] (4 pt.) Sia

$$f(x) = e^{4x} - e^{2x}\,.$$

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare il numero degli elementi distinti dell'insieme $f^{-1}(a)$.

Soluzione:

4] (4 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quattro volte derivabile e tale che, per $x \to 0$,

$$f(x) = 4 + a(a-1)(a-2)x + a(a^2-4)x^2 + a(a+1)x^3 + \frac{1}{5}x^4 + o\left(x^4\right)\,.$$

Stabilire per quali a il grafico di f presenta, nel punto di ascissa 0, uno dei seguenti comportamenti (specificando quale): massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.

Soluzione:

5] (4 pt.) Determinare l'eventuale asintoto, per $x \to +\infty$, della funzione

$$f(x) = (e^{2/x} - 1)\,\frac{x^4 - 3x^3 + 7}{x^2 + 1}.$$

Soluzione:

6] (4 pt.) In $\mathbb{R}^2$, si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \left(\sin \frac{\pi n}{2} \ , \ 2 - \frac{1}{k} \right), \quad k, n \in \mathbb{N} \right\}. \qquad \text{Allora}$$

$\overset{\circ}{A}=$ ....

$A' =$ ....

$\operatorname{diam}(\mathrm{A}) =$ ....

7] (6 pt.) Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2 - 3x^4} + \log\left(1 - x^2 - x^4\right) - 1 + 4x^4}{\sin x^6} \ .$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Cognome............................ **Nome**....................... **Matricola**..................

Desidero sostenere la prova orale Martedì 2 febbraio $\boxed{\text{sì}}$ oppure successivamente $\boxed{\text{sì}}$

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (prova scritta)

27 gennaio 2016 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione B

1] (4 pt.) Stabilire per quali valori del parametro reale a è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{3a}\left(3^{2/n}-1\right)}{\log\left(3^n+n^3\right)}\,.$$

Soluzione:

2] (4 pt.) Sapendo che la funzione

$$f(x) = \arctan\left(4 - 3e^{2x}\right) - 3x$$

è strettamente monotona su $\mathbb{R}$, detta g la sua inversa, calcolare

$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ [Ricordare che $\arctan(\pm 1) = \pm\pi/4$].

3] (4 pt.) Sia

$$f(x) = e^x - e^{3x}\,.$$

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare il numero degli elementi distinti dell'insieme $f^{-1}(a)$.
Soluzione:

4] (4 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quattro volte derivabile e tale che, per $x \to 0$,

$$f(x) = 5 + a(a-1)(a+2)x + a(a^2-1)x^2 + (a-1)(a-2)x^3 + \frac{1}{2}x^4 + o\left(x^4\right)\,.$$

Stabilire per quali a il grafico di f presenta, nel punto di ascissa 0, uno dei seguenti comportamenti (specificando quale): massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.

Soluzione:

5] (4 pt.) Determinare l'eventuale asintoto, per $x \to +\infty$, della funzione

$$f(x) = (e^{4/x} - 1)\,\frac{x^4 - x^3 - 5}{x^2+1}.$$

Soluzione:

6] (4 pt.) In $\mathbb{R}^2$, si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}\ ,\ \cos\frac{\pi k}{2}\right), \quad k, n \in \mathbb{N} \right\}. \qquad \text{Allora}$$

$\overset{\circ}{A}=$ ....

$A' =$ ....

$\operatorname{diam}(\mathrm{A}) =$ ....

7] (6 pt.) Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2+3x^4} + \log\left(1 + x^2 + x^4\right) - 1 - 4x^4}{x^4 \sin^2 x} \ .$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Cognome............................ **Nome**....................... **Matricola**..................

Desidero sostenere la prova orale Martedì 2 febbraio $\boxed{\text{sì}}$ oppure successivamente $\boxed{\text{sì}}$

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (prova scritta)

27 gennaio 2016 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione C

1] (4 pt.) Stabilire per quali valori del parametro reale a è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(5^{3/n}-1\right)}{n^{5a}\log\left(5^n+n^5\right)}\,.$$

Soluzione:

2] (4 pt.) Sapendo che la funzione

$$f(x) = \arctan\left(3-2e^{2x}\right) - x$$

è strettamente monotona su $\mathbb{R}$, detta g la sua inversa, calcolare

$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ [Ricordare che $\arctan(\pm 1) = \pm\pi/4$].

3] (4 pt.) Sia

$$f(x) = e^{2x} - e^{3x}\,.$$

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare il numero degli elementi distinti dell'insieme $f^{-1}(a)$.

Soluzione:

4] (4 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quattro volte derivabile e tale che, per $x \to 0$,

$$f(x) = -4 + a(a+1)(a+2)x + a(a^2-4)x^2 + (a-1)(a+2)x^3 - \frac{1}{3}x^4 + o\left(x^4\right)\,.$$

Stabilire per quali a il grafico di f presenta, nel punto di ascissa 0, uno dei seguenti comportamenti (specificando quale): massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.

Soluzione:

5] (4 pt.) Determinare l'eventuale asintoto, per $x \to +\infty$, della funzione

$$f(x) = (e^{2/x}-1)\,\frac{x^4-5x^3-7}{x^2+1}.$$

Soluzione:

6] (4 pt.) In $\mathbb{R}^2$, si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \left(\cos \frac{\pi k}{2} \ , \ 1 + \frac{1}{n} \right), \quad k, n \in \mathbb{N} \right\}. \qquad \text{Allora}$$

$\overset{\circ}{A}=$ ....

$A' =$ ....

$\operatorname{diam}(\mathrm{A}) =$ ....

7] (6 pt.) Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2+3x^4} + \log\left(1 - x^2 - x^4\right) - 1 - 2x^4}{x^3 \operatorname{Sh} x^3} \ .$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Cognome............................ **Nome**....................... **Matricola**..................

Desidero sostenere la prova orale Martedì 2 febbraio $\boxed{\text{sì}}$ oppure successivamente $\boxed{\text{sì}}$

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (prova scritta)

27 gennaio 2016 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione D

1] (4 pt.) Stabilire per quali valori del parametro reale a è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{5a} \log\left(5^n + n^5\right)}{\left(5^{2/n} - 1\right)} \, .$$

Soluzione:

2] (4 pt.) Sapendo che la funzione

$$f(x) = \arctan\left(3 - 2e^{3x}\right) - x$$

è strettamente monotona su $\mathbb{R}$, detta g la sua inversa, calcolare

$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ [Ricordare che $\arctan(\pm 1) = \pm\pi/4$].

3] (4 pt.) Sia

$$f(x) = e^{3x} - e^{x} \, .$$

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare il numero degli elementi distinti dell'insieme $f^{-1}(a)$.

Soluzione:

4] (4 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quattro volte derivabile e tale che, per $x \to 0$,

$$f(x) = 3 + a(a+1)(a-2)x + a(a^2-1)x^2 + a(a+2)x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right) .$$

Stabilire per quali a il grafico di f presenta, nel punto di ascissa 0, uno dei seguenti comportamenti (specificando quale): massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.

Soluzione:

5] (4 pt.) Determinare l'eventuale asintoto, per $x \to +\infty$, della funzione

$$f(x) = (e^{4/x} - 1) \, \frac{x^4 + x^3 + 4}{x^2 + 1} .$$

Soluzione:

6] (4 pt.) In $\mathbb{R}^2$, si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \left(2 + \frac{1}{n} \ , \ \sin \frac{\pi k}{2} \right), \quad k, n \in \mathbb{N} \right\}. \qquad \text{Allora}$$

$\overset{\circ}{A}=$ ....

$A' =$ ....

$\operatorname{diam}(\mathrm{A}) =$ ....

7] (6 pt.) Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2 - 3x^4} + \log\left(1 + x^2 + x^4\right) - 1 + 2x^4}{\operatorname{Sh} x^6} \ .$$

Scrivere uno svolgimento completo.