Analisi Matematica 1- Corso di Laurea in Fisica

ESERCIZI –Foglio 10

1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x+1} & \text{se } x > 0 \\ \\ a \sin x + b & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

   (a) Determinare (se esistono) per quali valori di a e b la funzione f risulta continua su tutto $\mathbb{R}$.

   (b) Per tali valori è anche derivabile?

2. Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x < 0 \\ \\ x^2 \cos(\dfrac{1}{x}) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

   È possibile estendere la definizione di f su tutto $\mathbb{R}$, in modo che l'estensione $\tilde{f}$ risulti continua? $\tilde{f}$ è derivabile?

3. Determinare l'equazione della retta passante per l'origine e tangente al grafico di $f(x) = e^x$.

4. Sia $g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $g(e) = 2$ e $f(x) = (\log x)^{g(x)}$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = e$.

5. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x \,\sin x & \text{se } x \geq 0 \\ \\ a\,x^2 + b\,x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

   Determinare per quali valori di a e b la funzione f è derivabile con continuità su $\mathbb{R}$ (cioè f derivabile e f' continua).

6. Calcolare la derivata (specificando dove esiste) delle seguenti funzioni.

   (a) $f(x) = \sin(x^3 - x)$;

   (b) $f(x) = \log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$;

   (c) $f(x) = \sqrt{e^{x^2} + 1}$;

   (d) $f(x) = \cos(\log x)$;

   (e) $f(x) = x^x$;

   (f) $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

7. Determinare la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ dove f è data dall'esercizio precedente e x_0 è dato rispettivamente da

   (a) $x_0 = 1$;
   (b) $x_0 = 2$;
   (c) $x_0 = 0$;
   (d) $x_0 = e^{\frac{\pi}{4}}$;
   (e) $x_0 = 1$;
   (f) $x_0 = 2\pi$.

8. Studiare continuità, derivabilità delle seguenti funzioni

   (a) $$f(x) = \begin{cases} |x|^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   (b) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \log^2 x}{(x-1)^2} & \text{se } x > 0, \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

9. Calcolare, per le funzioni indicate, il valore della derivata della funzione inversa nel punto y_0 :

   i) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2-x}$, $y_0 = 2$; ii) $f(x) = \sqrt{4x^3 + 2x}$, $y_0 = 6$.

10. Sia $h = g \circ f$. Calcolare $h'(t_0)$, sapendo che:

    i) $t_0 = -2$, $g'(2) = 6$ e $f(t) = \sqrt[3]{t^2 + 4}$;

    ii) $t_0 = -1$, $g'(-1) = 1$ e $f(t) = \dfrac{e^{1+t}}{t}$.

11. Determinare per quali valori $k \in \mathbb{R}$ il grafico della funzione f_k ammette, nel punto di ascissa x_0, retta tangente di equazione data:

    i) $f_k(x) = k^2 x^3 - 4kx + 5$, $x_0 = 2$, $y = x + 1$;

    ii) $f_k(x) = \log(x + k)$, $x_0 = 3$, $y = x - 3$.