Analisi Matematica 1- Corso di Laurea in Fisica

ESERCIZI –Foglio 11

1. Determinare dominio (insieme di definizione) ed eventuali asintoti delle funzioni:

   (a) $f(x) = (x+2)\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$;

   (b) $g(x) = x\left(1 - \sin\frac{1}{x}\right) + \cos\frac{1}{x^2}$;

   (c) $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}\exp\left(\dfrac{2x}{x-2}\right)$.

2. Sia data la funzione $f(x) = x + \arctan x$. Dimostrare che $f(x)$ è strettamente monotona da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Detta g la funzione inversa calcolare $g'(\frac{\pi}{4}+1)$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona e derivabile, la cui retta tangente in $x_0 = 1$ ha equazione $y = \sqrt{\mathrm{e}}x + \sqrt{\mathrm{e}}$. Detta $g(x) = f^{-1}(x)$ la sua funzione inversa determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto di ascissa $2\sqrt{\mathrm{e}}$.

4. Dimostrare la seguente diseguaglianza:

$$\arctan x > \frac{x}{1+x^2}, \quad x \in (0, +\infty).$$

5. Verificare che l'equazione

$$4x^2 - \log(1+x^2) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan x$$

   ha una sola soluzione nell'intervallo $[0, 1]$.

6. Mostrare che il polinomio $x^5 - 7x + a$, ha al più uno zero in $[-1, 1]$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

7. Determinare il più grande intervallo I che contiene l'origine, dove è invertibile la funzione

$$f(x) = x^4 - 4x + 1.$$

   Detta f^{-1} la funzione inversa su I determinarne il dominio e calcolare $(f^{-1})'(6)$.

8. Determinare il massimo e minimo assoluto di

   a) $f(x) = 2x^6 - 15x^4 + 24x^2$ nell'intervallo $[-3, 1]$;

   b) $g(x) = |x| + |2x - 1|$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

9. Trovare eventuali massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x) = x - \log(x^2 + x + 1) + 2\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

10. Calcolare i seguenti limiti.

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\big(1-(x+1)^{1/3}\big)}{\sin x - x}; \qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{x}}{x};$$

$$(c)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x^2(1-\cos x)}; \qquad (d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log^2(1+x) - \sin(x^2) + x^3}{11x^4};$$

$$(e)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x-\sin x}; \qquad (f)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\big(\sqrt{1+\sin(1/x)}-1\big)}{1-\sqrt{x}\sin(1/\sqrt{x})};$$

$$(g)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{2(1-\cos\sqrt{x}) - x}{e^{x^2}-1}; \qquad (h)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{\log(1+x)}.$$

11. Calcolare i seguenti limiti.

$$(a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\log x}; \qquad (b)\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{x^4+2x^3}+x;$$

$$(c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-(\arctan x)^2}{(1-\cos x)^2}; \qquad (d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(2+x)^{x\log x}}{x^{\log x}};$$

$$(e)\ \lim_{x\to 0}x^{-3}\left(\mathrm{e}^{x^2}\log(1+x) - \sin x + \frac{x^2}{2}\right); \qquad (f)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\mathrm{e}^x - x^3\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{x^2+3x(\log|x|)^2};$$

$$(g)\ \lim_{n\to+\infty}n^\alpha\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-1+\frac{1}{2n^2}\right);\ \alpha\in\mathbb{R} \qquad (h)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2\sin x+(\sin x)^2}{x^4+x^3+2x\sin x};$$

$$(i)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(3+\sin x)}{x^3}; \qquad (l)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sin(\sqrt[3]{x}+x)}{x};$$

$$(m)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[(\cos x)^{\frac{1+x}{x}}-1\right]; \qquad (n)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x - 1}{\sqrt{1+\log\frac{1-x}{1+x}}-1};$$

$$(o)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(1-\mathrm{e}^x)-1}{\mathrm{e}^{1-\cos x}-1}; \qquad (p)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-\frac{x}{\sin x}}{x-\log(1+x)}.$$

12. Determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = (x^2 - x)\left(2^{\frac{x+2}{x}} - 2\right)$;

   (b) $g(x) = x\left(2x(1+x)\log\left(\frac{x+1}{x-2}\right) - 6e^{1/x} - 3\right)$.

13. Determinare la 20–esima derivata in 0 della funzione $f(x) = \cosh(x^3)\log(1+x^4)$.

14. sia $f(x) = x^2 \log x$. Determinare in quali dei seguenti intervalli la funzione è invertibile. $I_1 = (0, +\infty)$; $I_2 = (e^{-1/3}, +\infty)$; $I_3 = (e^{-1}, e^{-1/4})$.

15. Sia g una funzione derivabile 3 volte in $x = 0$ e tale che $g(x) = 1+x-2x^2+x^3+o(x^3)$, per $x \to 0$. scrivere la formula di MacLaurin arrestata al terzo ordine di

$$f(x) = \frac{g(x)}{1+2x}.$$

16. Scrivere la formula di Taylor con punto iniziale $x_0 = \pi$ e resto secondo Peano arrestata al terzo ordine della funzione $f(x) = x \sin x$.

17. Per quali valori dei parametri reali a, b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(3\log x)-1}{\sqrt[5]{x}-1} & x > 1 \\ ax^2 + bx & x \leq 1 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x = 1$?

18. Calcolare al variare del parametro $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \alpha x + x^{\alpha+2}}{\mathrm{e}^{2x^2} - \mathrm{Ch}(\log(1+2x))} .$$

19. Siano $I = [-4, +\infty)$, e $f(x) = \frac{3}{x+5} - |x+1|$. Determinare $\inf_{x \in I} f(x)$ e $\sup_{x \in I} f(x)$ ed eventuali estremanti relativi di f in I. Esistono $\min_{x \in I} f(x)$ e $\max_{x \in I} f(x)$?

20. Determinare, al variare del parametro reale a il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{n}}{\cos \frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$