

Analisi Matematica 1- Corso di Laurea in Fisica

ESERCIZI – Foglio 2

1. Risolvere le seguenti disequazioni:

(a) $\frac{3|x|}{\sqrt{x+2}+x} \geq 1$;

(b) $\sqrt{|x-1|} + |x| < 3$.

2. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = [\sin |x| - 1]$;

(b) $g(x) = \sqrt[4]{(x-1)^5}$ e $h(x) = -|g(-x) - 1|$;

(c) $F(x) = |3 \sin(5x) - 2|$.

3. Siano date le funzioni $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ e $g(x) = |x|^{\sqrt{3}} + 1$. Rappresentare graficamente le funzioni $F(x) = f(g(x))$ e $G(x) = g(f(x))$.

4. Sia

$$f(x) = \begin{cases} -|x+5| & \text{se } x < -1 \\ x-1 & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ \sqrt{1+x} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Determinare il più ampio intervallo che contiene zero dove f è invertibile.

5. Dimostrare per induzione le seguenti proprietà.

(a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(b) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$;

(c) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

6. Dimostrare per induzione che se A è un insieme costituito da n elementi, l'insieme delle parti di A (cioè l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di A , compresi lo stesso A e l'insieme vuoto) ha 2^n elementi.

7. (I compitino a.a. 2009-2010) Determinare estremo inferiore, estremo superiore e (se esistono) massimi e minimi del seguente sottoinsieme di \mathbb{R}

$$E = \left\{ x \in [3, 5], x \neq \frac{5n-2}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$\inf E = \dots\dots; \quad \sup E = \dots\dots; \quad \min E = \dots\dots; \quad \max E = \dots\dots$$

8. (I compitino a.a. 2009-2010) Determinare tutti e soli i valori del parametro reale k per i quali la disequazione

$$2\sqrt{x} + \sqrt{4-x} < \sqrt{3x+2k}$$

è soddisfatta per ogni $x \in [0, 4]$.

9. Sia

$$A = \left\{ x = \frac{(-1)^{n+1}(3n-2)}{n2^{n(1-\cos n\pi)}}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determinare estremo superiore, estremo inferiore ed eventuale massimo e minimo di A .

10. Sia

$$A = \left\{ x = \frac{m^2}{n} : 2m^2 < n \leq 3m^3, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determinare estremo superiore, estremo inferiore ed eventuale massimo e minimo di A .

11. Siano

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -4 \\ 3+x & \text{se } -4 < x \leq 0 \\ 2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} -2x-8 & \text{se } x < -3 \\ -2 & \text{se } x \geq -3 \end{cases}.$$

Tracciare i diagrammi delle funzioni $f \circ g$, $g \circ f$ e $h(x) = |f(|x|)|$.

12. Rappresentare graficamente le funzioni:

$$f(x) = \log(x) \qquad g(x) = |f(x-2)| - 1.$$