Analisi Matematica 1- Corso di Laurea in Fisica

ESERCIZI –Foglio 3

1. Stabilire quale dei seguenti insiemi di $\mathbb{R}^2$, dotato della metrica euclidea, è aperto, chiuso, limitato.
   (a) $E := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2; \|\underline{x}\| \geq 1\}$
   (b) $E := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2; 1 < \|\underline{x}\| \leq 2\}$
   (c) E è un insieme costituito da un numero finito di punti
   (d) $E := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2; \underline{x} = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}), n \in \mathbb{N}\}$
   (e) $E := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2; 1 < x_1 < 2, x_2 = 3\}$.

2. Determinare $A^o, \partial A, A'$ e stabilire se A è chiuso e limitato nei seguenti casi:
   (a) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 < x < 4,\ y = 5\}$
   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \sqrt{(9 - x^2 - y^2)(2x - x^2 - y^2 - 1)} \in \mathbb{R}\}$.

3. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e definiamo
$$d_1(x, y) = (x - y)^2$$
$$d_2(x, y) = |x - 2y|$$
$$d_3(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$
   Determinare quale fra queste funzioni è una distanza in $\mathbb{R}$ e quale no.

4. Sia $A := \mathbb{Z} \cup \{k + \frac{1}{q}, k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$. Determinare l'insieme A' dei punti di accumulazione di A.

5. Si consideri il sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ dato da
$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,\ \text{dove } A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ x \geq 0,\ y \geq 0\ ,\ x^2 + y^2 < 1 - \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$
   Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
   (a) A è aperto in $\mathbb{R}^2$;
   (b) A è limitato;
   (c) ogni A_n ha cardinalità del continuo;
   (d) se $B_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ |x| < 1 - \frac{1}{n}\ ,\ n \geq 1\right\}$, allora $A_n \subseteq B_n$ per ogni $n \geq 1$.

6. Dire quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ è contemporaneamente chiuso, limitato e non vuoto.

(a) $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n}, 0\right)$ (b) $E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$

(c) $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [n^3, +\infty)$ (d) $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} \ , 3 + \frac{1}{n}\right)$.

7. Sia $E := \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < |x| + 2|y| \leq 1 \ , \ \ z = 1\}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare l'insieme E' dei punti di accumulazione di E, l'insieme E^o dei punti interni di E e la frontiera ∂E di E ;

(b) E è chiuso e limitato?

8. Determinare quale dei seguenti insiemi di $\mathbb{R}$ è contemporaneamente chiuso, limitato e non vuoto.

(a) $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(1, 1 + \frac{1}{n}\right)$ (b) $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[0, 2 - \frac{1}{2^n}\right)$

(c) $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [n, 2n]$ (d) $E = \bigcap_{n=2}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{\log n}\right)$.

9. Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in (-\infty, 1), |y| \leq \mathrm{e}^x\}$.
Stabilire quali fra queste affermazioni sono vere e quali sono false

(a) X è limitato in $\mathbb{R}^2$

(b) X è chiuso in $\mathbb{R}^2$ ma non è limitato

(c) X è aperto in $\mathbb{R}^2$

(d) X non è né aperto né chiuso in $\mathbb{R}^2$.

10. Siano $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ e $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, dove

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \ 1 - \frac{1}{2n} \leq |x| + |y| < 1 + \frac{1}{2n} \right\}.$$

Quale di queste affermazioni è vera e quale è falsa?

(a) A è aperto.

(b) B è vuoto.

(c) $(0, 0)$ è un punto interno di A.

(d) B è chiuso.