Analisi Matematica 1- Corso di Laurea in Fisica

ESERCIZI –Foglio 4

1. In $\mathbb{R}^2$ dotato della metrica euclidea, per ciascuno dei seguenti insiemi determinare interno, derivato, chiusura e frontiera. Stabilire inoltre se si tratta di insiemi aperti, chiusi, limitati.

   (a) $E := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 < 1, x > 0, y < 0\}$

   (b) $E := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2; x^2 \geq 4, y \in \mathbb{N}\}$

   (c) $E := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 0\}$.

2. Per ciascuno dei seguenti insiemi determinare l'interno, la frontiera e il derivato:

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - x = 0\}$;

   (b) $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 \leq x < 2\} \cup \{3, \pi\}$;

   (c) $C = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < \|\underline{x}\| \leq 3\}$;

   (d) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < 0\}$.

3. In $\mathbb{R}$ dotato della metrica euclidea, sia $E \subset \mathbb{R}$ il sottoinsieme

$$E = \{x_n = -\cos(\pi n) + 5^{\frac{n-1}{n}}, n \in \mathbb{N}\}.$$

   (a) Determinare estremo superiore/inferiore e se esistono, massimo e minimo di E.

   (b) Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

   i) $E' = \emptyset$;

   ii) $E^o = \emptyset$;

   iii) $\bar{E} = E$;

   iv) E è costituito solo da punti isolati.

4. Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito

$$A = [0, 1] \cup ((1, 2] \cap \mathbb{Q}) \cup \{3\}.$$

   Determinare interno, frontiera e derivato di A rispetto alla metrica euclidea.

5. Per $n = 1, 2, , \ldots$ sia

$$a_n = \begin{cases} 3^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{3n-4}{2n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

   Determinare gli estremi inferiore e superiore della successione $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, specificando se siano rispettivamente minimo e massimo.

6. Sia A l'insieme degli zeri della funzione $f(x) = \sin \frac{1}{\sin(1/x)}$. Determinare A e A' (rispetto alla metrica euclidea).

7. Sia $\mathbb{R}$ dotato della metrica usuale e sia $E \subset \mathbf{R}$ così definito:

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^n}, 2^{n+1}\right].$$

Stabilire quali fra queste affermazioni sono vere e quali sono false

(a) Min $E = 0$, Sup $E = +\infty$

(b) E è chiuso ma non è limitato

(c) Inf $E = 0$, Sup $E = +\infty$

(d) E^c non è chiuso

(e) E è un intervallo aperto.

8. *(novembre 2004)* Dopo aver stabilito quale dei seguenti insiemi è non vuoto, stabilire se si tratta di insiemi limitati. Quale è chiuso? eterminare quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è contempo non vuoto:

(a) $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, dove $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 1 - \frac{1}{n}, \ |y| \leq 1 + \frac{1}{n}\}$

(b) $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$, dove $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \geq 2 - \frac{1}{n}, \ x^2 + y^2 \leq 4\}$

(c) $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$, dove $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathrm{Max}\{|x|, |y|\} \geq n^2\}$

(d) $E = \{(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 : \ x_n = \frac{1}{n}\cos n\frac{\pi}{3}, \ y_n = \frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{3}, \ \ n \in \mathbb{N}\}$.

9. Si consideri la successione

$$a_n = \frac{n^2+1}{n-3}, \qquad\qquad n \geq 4.$$

Dimostrare che:

a) la successione non è limitata;

b) la successione è definitivamente monotona crescente.

10. Siano $\{a_n\}$ una successione a valori reali e a un numero reale. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false. In caso affermativo dimostrarle, altrimenti fornirne un controesempio.

(a) $a_n \to a$ con $a_n \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$

(b) $\{a_n\}$ converge $\quad \Longrightarrow \quad$ la successione $b_n \equiv a_{n+1} - a_n \to 0$

(c) $b_n \equiv a_{n+1} - a_n \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \{a_n\}$ converge.