

Analisi Matematica 1- Corso di Laurea in Fisica

ESERCIZI – Foglio 8

1. Stabilire il carattere delle seguenti serie.

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n+1}}$ | 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + n^2}{n + 3^{n-1}}$ | 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} + \log(n^2 + 3)}{n \log n + 1}$ |
| 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ | 5) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n^{\log n}}$ | 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}]}{n}$ |
| 7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ | 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan 2^n + 3n}{n^2 + 3}$ | 9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n^3 + 2n} - 1$ |
| 10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\log^2(1 + 3^{n-1})}$ | 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\log(n^7 + 2)}$ | 12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n} + \arctan n}}$ |
| 13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ | 14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\pi/2)^n}{n + 3^{-n}}$ | 15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \left[(2^n + 3^n)^{1/n} - 3 \right]$ |
| 16) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\sqrt{n}}$ | 17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cos n}{\sqrt{n^5 + 3}}$ | 18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$ |

2] Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ sono convergenti le seguenti serie.

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2-a}}{\arctan(n^{-2}) + n^{-1/2}}$ | 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n^2}{n 4^{(a+2)n}}$ | 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{an}}{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ |
| 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \frac{3 + \cos n^3}{1 + \sqrt{n^3}}$ | 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-2a)^n}{n^{n+a}}$ | 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt{n^2 + 2n^a}$ |
| 7) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{3}{2}-a} \sin(n^{-3a})$ | 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)^{an}}$ | 9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+n) - a \log(n^2+n)}{n}$ |

3] Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ sono convergenti le seguenti serie, distinguendo, se necessario, tra convergenza semplice ed assoluta.

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2 - 5)^n}{4^n \sqrt[3]{1 + n^2}}$ | 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x - 3)^n}{2^n \sqrt{1 + 3n}}$ | 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log n} \left(\frac{6x+7}{1+x^2}\right)^n$ |
|---|---|---|

4] Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente con $a_n \geq 0$. Cosa può essere detto del carattere delle seguenti serie?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}.$$

5] Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di funzione

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\tan(\pi x)}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow e^{-1}} \frac{\log x + 1}{x - e^{-1}}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\log(\tan x)}{\tan x - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2+x} - \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt[5]{4x+1} - \sqrt[5]{5x-1}}$

f) $\lim_{x \rightarrow e^2} \frac{\log x - 2}{x - e^2}$.

6] Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2) \left[\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^\pi - 1 \right]}{(2n + \sin \frac{1}{n})(e^{\pi/n} - 1)}$$

[3/2]

7] Al variare del parametro reale POSITIVO a calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right) - \sin(n^{-a})}{e^{1/n} - 1 - \arctan(n^{-2a})}$$

[$+\infty$ se $a \leq 1/2$; $-\infty$ se $1/2 < a \leq 1$; 1 se $a > 1$]

8] (Esercizio più difficile) Data la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} \\ a_{n+1} = \frac{\sqrt{2} + a_n^2}{1 + a_n} \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

Mostrare che essa è monotona decrescente e limitata.

Detto ℓ il limite della successione, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - \ell).$$