Analisi Matematica 1- Corso di Laurea in Fisica

ESERCIZI –Foglio 9

1] Si considerino le seguenti funzioni

(a) $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3$

(b) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^4}$

(c) $f(x) = x^3 \log |x|$

(d) $f(x) = (x+2)\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$

(f) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{1 + 2\sin x}$ (solo su $[0, 2\pi]$)

(g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2}$

(h) $f(x) = \dfrac{2 + \log x}{3 - \log x}$

(i) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x-1}}$

(l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2|x| - 1}}{2x - 1}$

(m) $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Per ciascuna funzione

□ determinare l'insieme di definizione e i limiti alla frontiera di tale insieme;

□ determinare gli eventuali asintoti verticali ed orizzontali.

2] Calcolare i seguenti limiti

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|2x+2| - |4x-1|}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \sin x^4)}{(1 - \cos x)^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \{\sqrt{x^2 + x^a} - x\}, \quad a \in \mathbb{R}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x \tan x - \sin x}{x^2 \cos x}$

3] Stabilire se la seguente funzione può essere prolungata in modo continuo a tutto $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\log \frac{x}{4}}.$$

4] Determinare per quali valori del parametro POSITIVO a, la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + x^{2a})}{x^{4a} + \arctan x}, \qquad x > 0$$

può essere prolungata in modo continuo in $x = 0$.

5] Determinare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni

1. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q},\ p, q \text{ interi e primi tra loro} \\ \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ *popcorn function*

6] Quale delle seguenti funzioni ammette almeno uno zero nell'intervallo $(0, 2)$?

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \\ -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{1}{2} + x(x - 2)$

c) $f(x) = x^2 + \log x$.