Promemoria su “asintotico” e “o piccolo”
(formulate per funzioni)
L.V.

Definizione. Siano $p \in \overline{\mathbf{R}}$ e f, g due funzioni definite in un intorno anulare di p, tali che $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to p$. Diciamo che, per $x \to p$:
(a) f è *asintotica* a g (e scriviamo $f(x) \sim g(x)$) se $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$;
(b) f è *o piccolo* di g (e scriviamo $f(x) = o(g(x))$) se $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Commenti.
- Il simbolo $o(g(x))$ nelle formule significa “una qualsiasi funzione f tale che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to p$”.
- La relazione “$\sim$” (per $x \to p$) è una relazione d'equivalenza (cioè, è riflessiva, simmetrica e transitiva).
- Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to p$, allora:
  (a) $\lim_{x\to p} f(x)$ esiste se e solo se esiste $\lim_{x\to p} g(x)$ e, in tal caso, i due limiti coincidono;
  (b) $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} g(x)$ definitivamente per $x \to p$.

Uso di “asintotico”. Supponiamo che, per $x \to p$, si abbia $f_1(x) \sim f_2(x)$ e $g_1(x) \sim g_2(x)$. Allora:
(a) $f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x)$, $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$, $|f_1(x)| \sim |f_2(x)|$;
(b) $f_1(x)^a \sim f_2(x)^a$ e $af_1(x) \sim af_2(x)$ per ogni $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;
(c) se $|\log f_1(x)| \to +\infty$, allora $\log f_1(x) \sim \log f_2(x)$.

Attenzione! Le relazioni $[f_1(x) + g_1(x)] \sim [f_2(x) + g_2(x)]$, $e^{f_1(x)} \sim e^{f_2(x)}$ possono essere false! Altrettanto vale per la relazione $\log f_1(x) \sim \log f_2(x)$ se $f_j(x) \to 1$ per $x \to p$.

Legge di trascuramento. $f(x) + o(f(x)) \sim f(x)$.

Uso di “o piccolo”. Sia $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
(a) $o(c \cdot f) = o(f)$, $c \cdot o(f) = o(f)$;
(b) $f = o(g) \Rightarrow f^a = o(g^a)\ \forall a > 0$;
(c) $o(f) + o(f) = o(f)$;
(d) $f \cdot o(g) = o(fg)$, $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$;
(e) $o(o(f)) = o(f)$;
(f) $f_1 \sim f_2$, $g_1 \sim g_2$, $f_1 = o(g_1) \Rightarrow f_2 = o(g_2)$.