Analisi Matematica 1 (Fisica)
2014–2015
Esercizi con asterisco
(non obbligatori)

Si tratta di esercizi un po' "stimolanti", esercizi in più. Sono rivolti a chi si sente già sicuro negli esercizi delle esercitazioni e del tutorato e ha voglia di divertirsi con qualche problemino magari un po' diverso.

1. *(15 ottobre 2014)*
Dimostrare che la somma dei primi n quadrati perfetti vale $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e calcolare poi

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-2)\,.$$

2. *(15 ottobre 2014)*
Trovare <u>un</u> $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left(\sqrt{3}\right)^n > n^2 \quad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

3. *(15 ottobre 2014)*
Fissato $x \in \mathbb{R}$, consideriamo i numeri

$$y_n := nx - [nx] \qquad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

(dove $[t]$ denota *la parte intera* del numero reale t, cioè, il più grande intero che non superi t).
Dimostrare che x è razionale se e solo se l'insieme $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ è finito.

4. *(15 ottobre 2014)*
Diciamo che un numero reale x è "*fantastico*" se arbitrariamente vicino ad x esistono numeri del tipo $\sqrt{m} - \sqrt{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$. Quali dei seguenti cinque numeri sono fantastici?

$$0\,, \quad 1\,, \quad 2\,, \quad \sqrt{2}\,, \quad \pi\,.$$

(Suggerimento: iniziate con lo zero.)

5. *(17 ottobre 2014)*
<u>*Numeri algebrici e trascendenti.*</u>
Un *numero algebrico* è un numero reale che è radice di qualche polinomio a coefficienti interi. I numeri reali non algebrici vengono chiamati *trascendenti.*
Denotiamo con $\mathbb{A}$ l'insieme dei numeri algebrici.
(Si ricordi che un *polinomio* è una funzione p della forma

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 \,.$$

I *coefficienti* di p sono le costanti a_i.)

(a) Dimostrare che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$.
(b) Dimostrare che $\mathbb{A} \neq \mathbb{Q}$.
(c) Dimostrare che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ ha cardinalità del continuo.
(Suggerimento: dimostrate che $\mathbb{A}$ è numerabile.)

Commento. Dal punto (c) segue che esistono dei numeri trascendenti. È noto, ma non facile da dimostrare, che i numeri π, e sono trascendenti.

6. *(22 ottobre 2014)*
Sia E un insieme non vuoto. Denotiamo con $\mathcal{B}(E)$ l'insieme di tutte le funzioni limitate $f\colon E \to \mathbb{R}$ (la lettera $\mathcal{B}$ viene dall'inglese "bounded").
Per $f, g \in \mathcal{B}(E)$, poniamo

$$d(f,g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)| \,.$$

Dimostrare che $\big(\mathcal{B}(E), d\big)$ è uno spazio metrico.
Per $E = \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $r > 0$, come è fatto l'intorno $B(f,r)$?

7. *(22 ottobre 2014)*
Per $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, definiamo

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|x_i - y_i|} \;.$$

È una metrica su $\mathbb{R}^n$? (Potete prima considerare il caso $n = 1$.)
(Suggerimento: osservate che, per ogni $a, b \geq 0$, si ha $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.)

8. *(27 ottobre 2014)*
Sia A un insieme in uno spazio metrico. Dimostrare che

$$\overline{A} = A \cup \partial A = A^\circ \cup \partial A \,.$$

9. *(27 ottobre 2014)*
Dimostrate rigorosamente che, in uno spazio metrico, l'unione di un numero finito di insiemi limitati è un insieme limitato.

10. *(29 ottobre 2014)*
In uno spazio metrico, sia $B(x,r)$ l'intorno sferico del punto x di raggio r (> 0), come siamo abituati. Denotiamo inoltre

$$C(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}\,.$$

(a) Dimostrare che negli spazi euclidei $\mathbb{R}^d$ si ha sempre che $\overline{B(x,r)} = C(x,r)$.
(b) Mostrare con un controesempio che l'uguaglianza $\overline{B(x,r)} = C(x,r)$ non vale in ogni spazio metrico.
(c) Dimostrare che l'inclusione $\overline{B(x,r)} \subset C(x,r)$ vale in ogni spazio metrico.

11. *(13 novembre 2014)*
Dimostrate rigorosamente le seguenti due affermazioni.
(a) Se $a_n > 0$ per ogni n, e $a_n \to +\infty$, allora la successione delle medie geometriche

$$x_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

tende a $+\infty$.
(Da qui si ottiene immediatamente che $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.)
(b) Se $a_n \to +\infty$, allora la successione delle medie aritmetiche

$$y_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

tende a $+\infty$.

Le due affermazioni valgono anche per limiti finiti?

12. *(11 dicembre 2014)*
Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici e $f\colon X_1 \to X_2$ una funzione. Supponiamo che lo spazio X_1 sia compatto e che f sia continua e biunivoca. Dimostrare che anche f^{-1} è continua.

13. *(12 dicembre 2014)*
Dimostrare che ogni spazio metrico compatto è completo (cioè, ogni successione di Cauchy è convergente).

14. *(12 dicembre 2014)*
La *funzione di Riemann* $\mathcal{R}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita come segue:
- se x è irrazionale, $\mathcal{R}(x) = 0$;
- se $x = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $q \in \mathbb{N}$ primi tra loro, $\mathcal{R}(x) = \frac{1}{q}$;

- $\mathcal{R}(0) = 1$.

La funzione $\mathcal{R}$ è continua in qualche punto? Di che tipo sono i punti di discontinuità di $\mathcal{R}$?

15. *(18 dicembre 2014)*
Costruite una funzione biunivoca $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e tale che la sua funzione inversa f^{-1} non sia continua nel punto $y_0 := f(x_0)$.