Analisi Matematica 1 (Fisica)
2015–2016
Esercizi con asterisco
(non obbligatori)

Si tratta di esercizi un po' "stimolanti", esercizi in più. Sono rivolti a chi si sente già sicuro negli esercizi delle esercitazioni e del tutorato e ha voglia di divertirsi con qualche problemino magari un po' diverso.

1. *(1 dicembre 2015)* Siano X_1, X_2 due spazi metrici, X_1 compatto. Dimostrare che se $f\colon X_1 \to X_2$ è una funzione continua e biunivoca allora anche la funzione inversa f^{-1} è continua.

2. *(1 dicembre 2015)* Consideriamo la seguente funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (detta "funzione di Riemann"):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale,} \\ \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ con } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ q \text{ il minimo possibile.} \end{cases}$$

Quali sono i suoi punti di discontinuità, e di che tipo sono?

3. *(1 dicembre 2015)*
(a) Esiste una funzione $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ strettamente crescente e discontinua in ogni punto?
(b) Esiste una funzione $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ iniettiva e discontinua in ogni punto?

4. *(1 dicembre 2015)* Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo non vuoto e f una funzione continua e iniettiva. Dimostrate rigorosamente che f è strettamente monotona.

5. *(1 dicembre 2015)* Provate a costruire una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biunivoca e tale che f sia continua in 0, $f(0) = 0$ e la funzione inversa f^{-1} non sia continua in 0.

6. *(17 dicembre 2015)* Dimostrare la seguente caratterizzazione della stretta monotonia. Sia f una funzione continua in un intervallo I e derivabile in I°. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:
(a) f è strettamente crescente in I;
(b) $f' \geq 0$ in I°, e l'insieme $E := \{x \in I^\circ : f'(x) = 0\}$ non ha punti interni.

7. *(17 dicembre 2015)* Sia f una funzione n volte derivabile in x_0. Dimostrare che il corrispondente polinomio di Taylor P_n è l'unico polinomio p di grado $\leq n$ tale che

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{per ogni } k = 0, 1, \ldots, n.$$

(Suggerimento:
p può essere scritto nella forma $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$.)