Insiemi compatti in spazi metrici

(Analisi matematica 1, corso di laurea in Fisica)

L.V., Dicembre 2016

A lezione abbiamo definito la compattezza (v. sotto) in modo diverso da come è fatto sul libro di Soardi. In quanto segue, E è un insieme in uno spazio metrico (X, d).

Definizione 1. Diciamo che E è *compatto* se ogni successione di elementi di E ammette una sottosuccessione convergente a qualche punto di E.

Osserviamo che dalla definizione segue immediatamente che l'insieme E è compatto (in X) se e solo se lo spazio metrico (E, d) è compatto (in se stesso).

Esempi 2. (a) L'insieme vuoto $\emptyset$ è compatto.
(b) Ogni insieme finito è compatto.
(c) Sia X un insieme dotato della metrica discreta. Allora X è compatto se e solo se è finito.
(d) In $\mathbb{R}$, l'insieme $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ non è compatto.
(e) Sempre in $\mathbb{R}$, l'insieme $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ è compatto.

Ci farà comodo la seguente caratterizzazione degli insiemi chiusi, fatta qualche lezione fa.

Un insieme E è chiuso se e solo
se per ogni successione in E che converga in X,
il suo limite appartiene ad E.

Esercizio 3. Un sottoinsieme chiuso di un insieme compatto è sempre compatto.

Teorema 4 (Condizione necessaria)**.** *Ogni insieme compatto è chiuso e limitato. Ma non vale il vice versa.*

Dimostrazione. Supponiamo che E sia compatto. Dimostriamo che E è chiuso, utilizzando la caratterizzazione menzionata sopra. Se $E \ni x_n \to x \in X$, la compattezza implica che esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a qualche $y \in E$. Necessariamente *(perché?)* $x = y \in E$.

Dimostriamo ora che E è limitato. Procedendo per assurdo, supponiamo che E sia illimitato. Fissiamo un qualsiasi punto $z \in E$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, E non è contenuto in $B(z, n)$, e quindi esiste $x_n \in E$ tale che $d(x_n, z) \geq n$. Per compattezza, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a qualche punto di E. In particoloare, $\{x_{n_k}\}$ è limitata. Dall'altra parte, $d(x_{n_k}, z) \geq n_k \to +\infty$ e quindi $\{x_{n_k}\}$ è illimitata. Contraddizione.

Per vedere che un insieme chiuso e limitato non sia necessariamente compatto, basta considerare un insieme infinito X con la metrica discreta d. Allora X è chiuso (in se stesso) e limitato, ma non compatto. $\square$

Esercizio 5. *Come un esercizio di approfondimento, provate a dimostrare la seguente relazione tra la compattezza e la completezza.* Ogni spazio metrico compatto è completo. Ma non vale il vice versa.

Teorema 6 (Caratterizzazioni di compattezza)**.** *Per un insieme E in (X, d), le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(i) *E è compatto* (secondo la nostra definizione).

(ii) *"Ogni copertura aperta di E ammette una sottocopertura finita"* (questa è la definizione di compattezza usata nel libro di Soardi)*, cioè, per ogni famiglia $\mathcal{A} = \{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ di insiemi aperti tale che*

$$E \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

esiste un numero finito di indici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m \in \Gamma$ tali che

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_{\gamma_i}\,.$$

(iii) *Ogni sottoinsieme infinito di E ha almento un punto di accumulazione in E.*

Dimostrazione. La dimostrazione dell'equivalenza $(i) \Leftrightarrow (ii)$ è un po' tecnica e la omettiamo.

La dimostrazione della $(i) \Leftrightarrow (iii)$ è invece un facile esercizio. (Suggerimento: per dimostrare la "$\Rightarrow$", dato un insieme infinito $D \subset E$, considerate una successione iniettiva $\{x_n\} \subset D$; per dimostrare la "$\Leftarrow$", data una $\{x_n\} \subset E$, considerate il suo insieme immagine $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e distinguete due casi: D finito, e D infinito.) $\square$

Il seguente teorema mostra che negli spazi euclidei vale anche il vice versa nel Teorema 4.

Teorema 7 (Heine–Borel)**.** *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^d$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Un'implicazione è contenuta nel Teorema 4. Per dimostrare l'altra, supponiamo che E sia chiuso e limitato. Data una successione $\{x_n\} \subset E$, essa è limitata e quindi (per un noto teorema) ammette una sottosuccessione convergente a qualche $x \in X$. Essendo E chiuso, abbiamo $x \in E$ (per la caratterizzazione di insiemi chiusi menzionata sopra). $\square$

Osservazione 8. Dall'ultima dimostrazione segue anche immediatamente *(come?)* il seguente **teorema di Bolzano–Weierstrass**: *ogni sottoinsieme infinito e limitato di $\mathbb{R}^d$ ammette almeno un punto di accumulazione.*

Compattezza e continuità.

Ricordiamo ora la definizione di continuità nelle sue tre versioni equivalenti.

Definizione 9. Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $E \subset X_1$ un insieme, $x_0 \in E$. Diciamo che una funzione $f\colon E \to X_2$ è *continua nel punto* x_0 se soddisfa una delle seguenti tre condizioni equivalenti.

(i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.che $\forall x \in B_\delta(x_0) \cap E$ si abbia $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$.
(ii) Per ogni successione $\{x_n\} \subset E$ tale che $x_n \to x_0$ si ha che $f(x_n) \to f(x_0)$.
(iii) x_0 è un punto isolato di E, oppure $x_0 \in E'$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Diciamo inoltre che f è *continua* (in E oppure su E) se essa è continua in ogni punto di E.

Teorema 10 (Teorema generale di Weierstrass)**.** *Sia $f\colon X_1 \supset C \to X_2$ una funzione continua in C. Se C è compatto allora anche l'insieme immagine $f(C)$ è un insieme compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{y_n\} \subset f(C)$ una qualsiasi successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, possiamo scrivere $y_n = f(x_n)$ per qualche $x_n \in C$. Per la compattezza di C, la successione $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a qualche $x \in C$. Per la continuità di f in x, abbiamo $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(C)$. $\square$

Prima di enunciare un corollario importante del Teorema 10, abbiamo bisogno del seguente semplice fatto, proposto come esercizio.

Esercizio 11. *Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto, chiuso e limitato superiormente [inferiormente]. Allora esiste* $\max E$ *[*$\min E$*].*
(Suggerimento: per dimostrare che $s := \sup E$ appartiene ad E, procedete per assurdo.)

Corollario 12. *Sia C un insieme compatto in uno spazio metrico X. Allora ogni funzione continua $f\colon C \to \mathbb{R}$ ammette massimo e minimo. In altre parole, esistono $x_1, x_2 \in C$ tali che $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ per ogni $x \in C$.*

Dimostrazione. L'insieme $f(C)$ è compatto (in $\mathbb{R}$) e quindi ammette massimo e minimo (Esercizio 11). $\square$

Compattezza e uniforme continuità (approfondimento).

La nozione di uniforme continuità non è stata trattata nel nostro corso di Analisi matematica 1. La sua utilità si vedrà solo in Analisi matematica 2, dove servirà per dimostrare che le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann.

Definizione 13. Siano X_1, X_2 due spazi metrici, $\emptyset \neq E \subset X_1$. Diciamo che una funzione $f\colon E \to X_2$ è *uniformemente continua* (su E o in E) se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.che } \forall x, y \in E \text{ con } d_1(x,y) < \delta : \quad d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Esercizio 14. Sia $f\colon X_1 \supset E \to X_2$.

(a) Se f è uniformemente continua allora f è continua.
(b) Considerate la funzione continua $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, data da $f(x) = x^2$. Dimostrate che:
   (i) f è uniformemente continua su ogni intervallo compatto del tipo $[0,a]$;
   (ii) f non è uniformemente continua su $[0,+\infty)$.

Quindi l'uniforme continuità è una proprietà in generale più forte della continuità. Il seguente teorema dice che le due proprietà coincidono su insiemi compatti. Avremo bisogno del seguente facile esercizio *(svolgetelo!)*.

Esercizio 15. In uno spazio metrico, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ allora $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$.

Teorema 16. *Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $C \subset X_1$ un insieme compatto e $f\colon C \to X_2$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Procedendo per assurdo, supponiamo che f non sia uniformemente continua su C. Negando la definizione, quindi abbiamo:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ t.che } \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in C \text{ con } d_1(x,y) < \delta\,,\ \ d_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0.$$

Di conseguenza, considerando $\delta = \frac{1}{n}$, otteniamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $x_n, y_n \in C$ con $d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ e $d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$. Per compattezza, la successione $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a qualche $x \in C$. Analogamente, la (sotto)successione corrispondente $\{y_{n_k}\}$ ammette una sottosuccessione $\{y_{n_{k_j}}\}$ convergente a qualche $y \in C$. Ora abbiamo che $d_1(x,y) = \lim d_1(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = 0$, e quindi $x = y$. Per continuità, $f(x_{n_{k_j}}) \to f(x)$ e $f(y_{n_{k_j}}) \to f(y)$, da cui

$$0 < \varepsilon_0 \leq \lim d_2(f(x_{n_{k_j}}), f(y_{n_{k_j}})) = d_2(f(x), f(y)) = 0.$$

Contraddizione. $\square$