

Cognome..... Nome..... Matricola.....

C.I. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

14/11/2014 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione **A**

1A] (5 punti) Al variare del parametro reale a sia

$$L_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^3 + \log n)^a - n^{3a}}{n^2 + \sqrt{n}}$$

Allora $L_a = \dots$

2A] (4 pt.) Sia $A = \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2^{-n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Allora

$\sup A = \dots$; esiste $\max A$?..... $\inf A = \dots$; esiste $\min A$?.....

3A] (4 pt.) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x^2 & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Quale è il più ampio intervallo *aperto* contenente lo zero dove la funzione è invertibile?

4A] (2+3 pt.) Disegnare il grafico di $f(x) = 2^{-x}$ e di $g(x) = -\frac{2}{x+1}$ nello stesso piano cartesiano.

In \mathbb{R}^2 dotato della metrica euclidea, sia

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, g(x) < y < f(x) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N} \right\}.$$
 Allora

$\overset{\circ}{A} = \dots$

$A' = \dots$

$\partial A = \dots$

5A] (5 pt.) Sia $\{x_n\}$ una successione a valori reali. Quali delle implicazioni tra le seguenti tre affermazioni sono vere e quali sono false?

- (A) $x_n > 0$ definitivamente
- (B) $x_n > 0$ per infiniti n
- (C) $\{x_n\}$ converge a qualche $p > 0$

Vere

False

6A] (7 pt.) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{n^2 + 5}{n^2 + 1}} - \frac{2}{n^2} \right)^{2n^2}$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto. Scrivete la soluzione in un altro foglio (con nome e cognome!)

(Bonus) Sia A un sottoinsieme proprio e non vuoto di \mathbb{R} . Dimostrare che $\partial A \neq \emptyset$.

Cognome..... Nome..... Matricola.....

C.I. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

14/11/2014 prof. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione **B**

1B] (5 punti) Al variare del parametro reale a sia

$$L_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n + \log n)^{2a} - n^{2a}}{n^4 + \sqrt[4]{n}}$$

Allora $L_a = \dots$

2B] (4 pt.) Sia $A = \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Allora

$\sup A = \dots$; esiste $\max A$?..... $\inf A = \dots$; esiste $\min A$?.....

3B] (4 pt.) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Quale è il più ampio intervallo *aperto* contenente lo zero dove la funzione è invertibile?

4B] (2+3 pt.) Disegnare il grafico di $f(x) = \frac{2}{1-x}$ e di $g(x) = -2^x$ nello stesso piano cartesiano.

In \mathbb{R}^2 dotato della metrica euclidea, sia

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1, g(x) < y < f(x) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N} \right\}. \quad \text{Allora}$$

$\overset{\circ}{A} = \dots$

$A' = \dots$

$\partial A = \dots$

5B] (5 pt.) Sia $\{x_n\}$ una successione a valori reali. Quali delle implicazioni tra le seguenti tre affermazioni sono vere e quali sono false?

- (A) $x_n > 0$ definitivamente
- (B) $x_n > 0$ per infiniti n
- (C) $\{x_n\}$ converge a qualche $p > 0$

Vere

False

6B] (7 pt.) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{n^2 + 5}{n^2 + 1}} - \frac{7}{n^2} \right)^{n^2/2}$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto. Scrivete la soluzione in un altro foglio (con nome e cognome!)

(Bonus) Sia A un sottoinsieme proprio e non vuoto di \mathbb{R} . Dimostrare che $\partial A \neq \emptyset$.

Cognome..... Nome..... Matricola.....

C.I. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

14/11/2014 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione **C**

1C] (5 punti) Al variare del parametro reale a sia

$$L_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2 + \log n)^a - n^{2a}}{n^3 + \sqrt[3]{n}}$$

Allora $L_a = \dots$

2C] (4 pt.) Sia $A = \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Allora

$\sup A = \dots$; esiste $\max A$?..... $\inf A = \dots$; esiste $\min A$?.....

3C] (4 pt.) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 2 - x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Quale è il più ampio intervallo *aperto* contenente lo zero dove la funzione è invertibile?

4C] (2+3 pt.) Disegnare il grafico di $f(x) = 3^x$ e di $g(x) = \frac{3}{x-1}$ nello stesso piano cartesiano.

In \mathbb{R}^2 dotato della metrica euclidea, sia

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1, g(x) < y < f(x) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N} \right\}.$$
 Allora

$\overset{\circ}{A} = \dots$

$A' = \dots$

$\partial A = \dots$

5C] (5 pt.) Sia $\{x_n\}$ una successione a valori reali. Quali delle implicazioni tra le seguenti tre affermazioni sono vere e quali sono false?

- (A) $x_n > 0$ definitivamente
- (B) $x_n > 0$ per infiniti n
- (C) $\{x_n\}$ converge a qualche $p > 0$

Vere

False

6C] (7 pt.) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{n^2 + 4}{n^2 + 1}} + \frac{3}{n^2} \right)^{n^2/3}$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto. Scrivete la soluzione in un altro foglio (con nome e cognome!)

(Bonus) Sia A un sottoinsieme proprio e non vuoto di \mathbb{R} . Dimostrare che $\partial A \neq \emptyset$.

Cognome..... Nome..... Matricola.....

C.I. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

14/11/2014 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione **D**

1D] (5 punti) Al variare del parametro reale a sia

$$L_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n + \log n)^{3a} - n^{3a}}{n^3 + \sqrt[3]{n}}$$

Allora $L_a = \dots$

2D] (4 pt.) Sia $A = \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Allora

$\sup A = \dots$; esiste $\max A?$ $\inf A = \dots$; esiste $\min A?$

3D] (4 pt.) Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se } x < 0 \\ \sin x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Quale è il più ampio intervallo *aperto* contenente lo zero dove la funzione è invertibile?

4D] (2+3 pt.) Disegnare il grafico di $f(x) = \frac{3}{x+1}$ e di $g(x) = -3^{-x}$ nello stesso piano cartesiano.

In \mathbb{R}^2 dotato della metrica euclidea, sia

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, g(x) < y < f(x) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N} \right\}. \quad \text{Allora}$$

$\overset{\circ}{A} = \dots$

$A' = \dots$

$\partial A = \dots$

5D] (5 pt.) Sia $\{x_n\}$ una successione a valori reali. Quali delle implicazioni tra le seguenti tre affermazioni sono vere e quali sono false?

- (A) $x_n > 0$ definitivamente
- (B) $x_n > 0$ per infiniti n
- (C) $\{x_n\}$ converge a qualche $p > 0$

Vere

False

6D] (7 pt.) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{n^2 + 4}{n^2 + 1}} - \frac{4}{n^2} \right)^{2n^2}$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto. Scrivete la soluzione in un altro foglio (con nome e cognome!)

(Bonus) Sia A un sottoinsieme proprio e non vuoto di \mathbb{R} . Dimostrare che $\partial A \neq \emptyset$.