Cognome............................ **Nome**....................... **Matricola**..................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

16/11/2015 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione A

1A] (5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale a esiste finito il

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\lfloor a\rfloor}{3}\right)^n.$$

($\lfloor a\rfloor$ indica la *parte intera* di a.)

2A] (3 pt.) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^7}\log\left(2+3^n\right)-n^5\log\left(1+3^{-n}\right)\right)=\ldots\ldots\ldots$$

3A] (6 pt.) Per ogni $n\in\mathbb{N}$, sia

$$x_n=\begin{cases}-\dfrac{k+2}{k+1} & \text{se } n=2k\\[2ex] \dfrac{2n+5}{n+3} & \text{se } n=2k-1\end{cases}\qquad (k\in\mathbb{N})\,.\quad \text{Allora}$$

$\sup\{x_n\}=\ldots\ldots$; $\limsup_{n\to+\infty} x_n=\ldots\ldots$ $\inf\{x_n\}=\ldots\ldots$; $\liminf_{n\to+\infty} x_n=\ldots\ldots$

4A] (4 pt.) Al variare del parametro reale b disegnare i grafici significativamente diversi della funzione

$$f(x)=\left|b-\sqrt[3]{|x|}\right|$$

5A] (5 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ 4 + \frac{1}{2n} < |x| \leq 4 + \frac{1}{2n-1} \right\} \cup \{e^{-n}\}, \qquad \text{e sia} \qquad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

$\partial A_2 =$ ....

A_2 è limitato?............... A_2 è chiuso? ....

$\overset{\circ}{B}=$ ....

$B' =$ ....

6A] (7 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, sia

$$b_n = \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2/3} - 1}{\log n}.$$

a) Stabilire se esiste il limite della successione $x_n = (-1)^n \sin(b_n) \log^3 n$.
b) Calcolare l'eventuale limite della successione $y_n = (n^2+1)^{n b_n}$.
Scrivere uno svolgimento completo (di entrambi i punti).

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto. Scrivete la soluzione in un altro foglio (con nome e cognome!).

(Bonus) Sia A un sottoinsieme infinito non numerabile di $\mathbb{R}$. Dimostrare che $A' \cap A$ è infinito non numerabile. Lo stesso vale anche per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$?

Cognome.............................. Nome........................ Matricola...................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

16/11/2015 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione B

1B] (5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale a esiste finito il

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\lfloor a\rfloor}{5}\right)^n.$$

($\lfloor a\rfloor$ indica la *parte intera* di a.)

2B] (3 pt.) $\lim_{n\to+\infty}\left(n^3\log\left(1+2^{-n}\right)-\frac{4}{\sqrt{n}}\log\left(2+5^n\right)-\right)$ =.........

3B] (6 pt.) Per ogni $n\in\mathbb{N}$, sia

$$x_n=\begin{cases}-\dfrac{2k+1}{k+1} & \text{se } n=2k\\[2ex] \dfrac{n+3}{n+2} & \text{se } n=2k-1\end{cases}\qquad (k\in\mathbb{N})\,.\quad \text{Allora}$$

$\sup\{x_n\}=$ ...... ; $\limsup\limits_{n\to+\infty}x_n=$ ...... $\inf\{x_n\}=$ ...... ; $\liminf\limits_{n\to+\infty}x_n=$ ......

4B] (4 pt.) Al variare del parametro reale b disegnare i grafici significativamente diversi della funzione

$$f(x)=\left|b-|x|^{3/5}\right|$$

5B] (5 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ 2 - \frac{1}{2n} \le |x| < 2 - \frac{1}{2n+1} \right\} \cup \{-n^{-2}\}, \qquad \text{e sia} \qquad B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

$\partial A_2 =$ . . . .

A_2 è limitato?. . . . . A_2 è chiuso? . . . .

$\overset{\circ}{B}=$ . . . .

$B' =$ . . . .

6B] (7 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, sia

$$b_n = \frac{\sqrt[4]{\frac{n}{n+2}} - 1}{\log n}.$$

a) Stabilire se esiste il limite della successione $x_n = (-1)^n \arctan(b_n) \log^5 n$.
b) Calcolare l'eventuale limite della successione $y_n = (1 + \sqrt{n})^{nb_n}$.
Scrivere uno svolgimento completo (di entrambi i punti).

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto. Scrivete la soluzione in un altro foglio (con nome e cognome!).

(Bonus) Sia A un sottoinsieme infinito non numerabile di $\mathbb{R}$. Dimostrare che $A' \cap A$ è infinito non numerabile. Lo stesso vale anche per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$?

Cognome............................ **Nome**........................ **Matricola**..................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

16/11/2015 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione C

1C] (5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale a esiste finito il

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\lfloor a\rfloor}{2}\right)^n.$$

($\lfloor a\rfloor$ indica la *parte intera* di a.)

2C] (3 pt.) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\log\left(2+5^n\right)-n\log\left(1+5^{-n}\right)\right)=$.........

3C] (6 pt.) Per ogni $n\in\mathbb{N}$, sia

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{2k+3}{k+1} & \text{se } n=2k\\[2ex] -\dfrac{n+2}{n+3} & \text{se } n=2k-1\end{cases}\qquad (k\in\mathbb{N}).\quad \text{Allora}$$

$\sup\{x_n\}=$...... ; $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty}x_n=$...... $\inf\{x_n\}=$...... ; $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty}x_n=$......

4C] (4 pt.) Al variare del parametro reale b disegnare i grafici significativamente diversi della funzione

$$f(x)=\left|x^{2/3}-b\right|$$

5C] (5 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ 3 + \frac{1}{2n+1} \leq |x| < 3 + \frac{1}{2n} \right\} \cup \{2^{-n}\}, \qquad \text{e sia} \qquad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

$\partial A_2 =$ ....

A_2 è limitato?............... A_2 è chiuso? ....

$\overset{\circ}{B}=$ ....

$B' =$ ....

6C] (7 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, sia

$$b_n = \frac{\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^7 - 1}{\log n}.$$

a) Stabilire se esiste il limite della successione $x_n = (-1)^n \log(1 + b_n) \log^6 n$.

b) Calcolare l'eventuale limite della successione $y_n = \left(n^{3/2} - 1\right)^{n b_n}$.

Scrivere uno svolgimento completo (di entrambi i punti).

Questo esercizio verrà valutato <u>solo</u> se i precedenti sono stati <u>tutti</u> svolti in modo corretto. Scrivete la soluzione in un altro foglio (con nome e cognome!).

(Bonus) Sia A un sottoinsieme infinito non numerabile di $\mathbb{R}$. Dimostrare che $A' \cap A$ è infinito non numerabile. Lo stesso vale anche per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$?

Cognome............................ Nome....................... Matricola..................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

16/11/2015 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione D

1D] (5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale a esiste finito il

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\lfloor a\rfloor}{4}\right)^n.$$

($\lfloor a\rfloor$ indica la *parte intera* di a.)

2D] (3 pt.) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\log\left(2+4^n\right)-n^2\log\left(1+3^{-n}\right)\right)=$.........

3D] (6 pt.) Per ogni $n\in\mathbb{N}$, sia

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{k}{k+1} & \text{se } n=2k\\[2ex] -\dfrac{2n+5}{n+2} & \text{se } n=2k-1\end{cases}\qquad (k\in\mathbb{N})\,.\quad \text{Allora}$$

$\sup\{x_n\}=$...... ; $\limsup\limits_{n\to+\infty}x_n=$...... $\inf\{x_n\}=$...... ; $\liminf\limits_{n\to+\infty}x_n=$......

4D] (4 pt.) Al variare del parametro reale b disegnare i grafici significativamente diversi della funzione

$$f(x)=\left|\sqrt[4]{|x|}-b\right|$$

5D] (5 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\;:\;\; 1 - \frac{1}{2n+1} < |x| \le 1 - \frac{1}{2n+2} \right\} \cup \{-n^{-3}\}, \qquad \text{e sia} \qquad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

$\partial A_2 =$ ....

A_2 è limitato?............... A_2 è chiuso? ....

$\overset{\circ}{B}=$ ....

$B' =$ ....

6D] (7 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, sia

$$b_n = \frac{\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{3/2} - 1}{\log n}\,.$$

a) Stabilire se esiste il limite della successione $x_n = (-1)^n \big(1 - e^{b_n}\big) \log^4 n\,.$
b) Calcolare l'eventuale limite della successione $y_n = (n^3 - 1)^{n b_n}\,.$
Scrivere uno svolgimento completo (di entrambi i punti).

Questo esercizio verrà valutato <u>solo</u> se i precedenti sono stati <u>tutti</u> svolti in modo corretto. Scrivete la soluzione in un altro foglio (con nome e cognome!).

(Bonus) Sia A un sottoinsieme infinito non numerabile di $\mathbb{R}$. Dimostrare che $A' \cap A$ è infinito non numerabile. Lo stesso vale anche per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$?

Cognome............................ **Nome**........................ **Matricola**..................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

16/11/2015 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione E

1E] (6 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{2k+3}{k+1} & \text{se } n = 2k \\ \\ -\dfrac{n+2}{n+3} & \text{se } \ n = 2k-1 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}). \quad \text{Allora}$$

$\sup\{x_n\} =$ ...... ; $\limsup_{n\to+\infty} x_n =$ ...... $\inf\{x_n\} =$ ...... ; $\liminf_{n\to+\infty} x_n =$ ......

2E] (3 pt.) $$\lim_{n\to+\infty} \left(n^3 \log\left(1 + 2^{-n}\right) - \frac{4}{\sqrt{n}} \log\left(2 + 5^n\right) - \right) = \text{.........}$$

3E] (5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale a esiste finito il

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\lfloor a \rfloor}{3}\right)^n.$$

($\lfloor a \rfloor$ indica la *parte intera* di a.)

4E] (4 pt.) Al variare del parametro reale b disegnare i grafici significativamente diversi della funzione

$$f(x) = \left| \sqrt[4]{|x|} - b \right|$$

5E] (5 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \;:\; 4 + \frac{1}{2n} < |x| \leq 4 + \frac{1}{2n-1}\right\} \cup \{e^{-n}\}, \qquad \text{e sia} \qquad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

$\partial A_2 =$ ....

A_2 è limitato?............... A_2 è chiuso? ....

$\overset{\circ}{B}=$ ....

$B' =$ ....

6E] (7 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, sia

$$b_n = \frac{\sqrt[4]{\frac{n}{n+2}} - 1}{\log n}.$$

a) Stabilire se esiste il limite della successione $x_n = (-1)^n \arctan(b_n) \log^5 n$.
b) Calcolare l'eventuale limite della successione $y_n = (1 + \sqrt{n})^{nb_n}$.
Scrivere uno svolgimento completo (di entrambi i punti).

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto. Scrivete la soluzione in un altro foglio (con nome e cognome!).

(Bonus) Sia A un sottoinsieme infinito non numerabile di $\mathbb{R}$. Dimostrare che $A' \cap A$ è infinito non numerabile. Lo stesso vale anche per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$?

Cognome............................. Nome........................ Matricola...................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

16/11/2015 proff. M. Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione F

1F] (3 pt.) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{n}} \log\left(2+4^n\right) - n^2 \log\left(1+3^{-n}\right) \right)$ =.........

2F] (4 pt.) Al variare del parametro reale b disegnare i grafici significativamente diversi della funzione

$$f(x) = \left|x^{2/3} - b\right|$$

3F] (6 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia

$$x_n = \begin{cases} -\dfrac{k+2}{k+1} & \text{se } n = 2k \\[2ex] \dfrac{2n+5}{n+3} & \text{se } \ n = 2k-1 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N})\,. \quad \text{Allora}$$

$\sup\{x_n\} =$ ...... ; $\limsup_{n\to+\infty} x_n =$ ...... $\inf\{x_n\} =$ ...... ; $\liminf_{n\to+\infty} x_n =$ ......

4F] (5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale a esiste finito il

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\lfloor a \rfloor}{5}\right)^n.$$

($\lfloor a \rfloor$ indica la *parte intera* di a.)

5F] (5 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\; : \;\; 2 - \frac{1}{2n} \leq |x| < 2 - \frac{1}{2n+1} \right\} \cup \{-n^{-2}\}, \qquad \text{e sia} \qquad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

$\partial A_2 =$ ....

A_2 è limitato?............... A_2 è chiuso? ....

$\mathring{B} =$ ....

$B' =$ ....

6F] (7 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, sia

$$b_n = \frac{\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{3/2} - 1}{\log n}\,.$$

a) Stabilire se esiste il limite della successione $x_n = (-1)^n \left(1 - e^{b_n}\right) \log^4 n\,.$
b) Calcolare l'eventuale limite della successione $y_n = (n^3 - 1)^{n b_n}\,.$
Scrivere uno svolgimento completo (di entrambi i punti).

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto. Scrivete la soluzione in un altro foglio (con nome e cognome!).

(Bonus) Sia A un sottoinsieme infinito non numerabile di $\mathbb{R}$. Dimostrare che $A' \cap A$ è infinito non numerabile. Lo stesso vale anche per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$?