Cognome.............................. **Nome........................** **Matricola...................**

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (seconda prova di esonero)

19 gennaio 2015 proff. M.Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione A

1] (5 pt.) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge (precisando se si tratta di convergenza assoluta o semplice):

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\big(3-|a-1|\big)^n}{n\log n}.$$

Soluzione:

2] (5 pt.) Determinare gli eventuali estremanti della funzione

$$f(x) = 32|x+1| - x^4.$$

Punti di massimo o minimo assoluti .... Altri estremanti...............

3] (2+3 pt.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Nel punto $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + e^{x^2} - \cos 3x}{x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] ae^x + be^{-x} & \text{se } \ x \geq 0 \end{cases}$$

- è continua se e solo se ....
- è derivabile se e solo se ....

4] (4 pt.) La funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) - 3x + 2$$

è strettamente monotona su tutto $\mathbb{R}$. Denotata $g = f^{-1}$, allora $g'(2) =$ ....

5] (4 pt.) Calcolare la derivata decima in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+x^4)}{1+2x^2}.$$

Soluzione:

6] (2+5 pt.) Determinare (e specificare chiaramente) per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste finito il seguente limite e, in tali casi, calcolarlo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \log(1 + 2x)} - x - \cos(ax)}{x^2(1 - e^{2x})}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(**Bonus**) Sia f una funzione derivabile in un intervallo aperto contenente $[a, b]$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

(1) Se $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, allora $f'(x) = 0$ per almeno un $x \in (a, b)$.

(2) Se $f'(a) \neq f'(b)$, allora f' assume in (a, b) tutti i valori strettamente compresi fra $f'(a)$ e $f'(b)$.

Cognome.............................. Nome......................... Matricola...................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (seconda prova di esonero)

19 gennaio 2015   proff. M.Salvatori, L. Vesely   durata: **90 minuti**   versione B

1] (5 pt.) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge (precisando se si tratta di convergenza assoluta o semplice):

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\big(|a-1|-2\big)^n}{\sqrt{n}\,\log n}.$$

Soluzione:

2] (5 pt.) Determinare gli eventuali estremanti della funzione

$$f(x) = 4\left|x + \frac{1}{2}\right| - x^4.$$

Punti di massimo o minimo assoluti ....   Altri estremanti................

3] (2+3 pt.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Nel punto $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-x} + be^{x} & \text{se } x \le 0 \\ \dfrac{3x - e^{2x^2} + \cos x}{x} & \text{se } \ x > 0 \end{cases}$$

• è continua se e solo se ....

• è derivabile se e solo se ....

4] (4 pt.) La funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + 3 - 3x$$

è strettamente monotona su tutto $\mathbb{R}$. Denotata $g = f^{-1}$, allora $g'(3) =$ ....

5] (4 pt.) Calcolare la derivata ottava in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + x^2)}{1 + 2x^4}.$$

Soluzione:

6] (2+5 pt.) Determinare (e specificare chiaramente) per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste finito il seguente limite e, in tali casi, calcolarlo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\log(1-2x)} - \cos(ax) + x}{x^2 \sin x}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(**Bonus**) Sia f una funzione derivabile in un intervallo aperto contenente $[a, b]$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

(1) Se $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, allora $f'(x) = 0$ per almeno un $x \in (a, b)$.

(2) Se $f'(a) \neq f'(b)$, allora f' assume in (a, b) tutti i valori strettamente compresi fra $f'(a)$ e $f'(b)$.

Cognome.............................. **Nome**........................ **Matricola**...................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (seconda prova di esonero)

19 gennaio 2015 proff. M.Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione C

1] (5 pt.) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge (precisando se si tratta di convergenza assoluta o semplice):

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\big(|a-1|-3\big)^n}{\sqrt[3]{n}\,\log n}.$$

Soluzione:

2] (5 pt.) Determinare gli eventuali estremanti della funzione

$$f(x) = 32|x-1| - x^4.$$

Punti di massimo o minimo assoluti. . . . . Altri estremanti . . . .

3] (2+3 pt.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Nel punto $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + e^{x^2} - \cos 3x}{x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] ae^{-x} + be^{x} & \text{se } \ x \geq 0 \end{cases}$$

- è continua se e solo se ....
- è derivabile se e solo se ....

4] (4 pt.) La funzione

$$f(x) = 2x + 4 - \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

è strettamente monotona su tutto $\mathbb{R}$. Denotata $g = f^{-1}$, allora $g'(4) =$ ....

5] (4 pt.) Calcolare la derivata ottava in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+x^4)}{1+2x^2}.$$

Soluzione:

6] (2+5 pt.) Determinare (e specificare chiaramente) per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste finito il seguente limite e, in tali casi, calcolarlo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \log(1-x)} + \frac{x}{2} - \cos(ax)}{x\big(1 - \cos(x/2)\big)}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato <u>solo</u> se i precedenti sono stati <u>tutti</u> svolti in modo corretto.

(**Bonus**) Sia f una funzione derivabile in un intervallo aperto contenente $[a, b]$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

(1) Se $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, allora $f'(x) = 0$ per almeno un $x \in (a, b)$.

(2) Se $f'(a) \neq f'(b)$, allora f' assume in (a, b) tutti i valori strettamente compresi fra $f'(a)$ e $f'(b)$.

Cognome............................ **Nome**....................... **Matricola**..................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (seconda prova di esonero)

19 gennaio 2015 proff. M.Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione D

1] (5 pt.) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge (precisando se si tratta di convergenza assoluta o semplice):

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\big(2 - |a-1|\big)^n}{n \log n}.$$

Soluzione:

2] (5 pt.) Determinare gli eventuali estremanti della funzione

$$f(x) = 4\Big|x - \frac{1}{2}\Big| - x^4.$$

Punti di massimo o minimo assoluti............... Altri estremanti ....

3] (2+3 pt.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Nel punto $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + \cos x - e^{2x^2}}{x} & \text{se } x < 0 \\ ae^x + be^{-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

• è continua se e solo se ....

• è derivabile se e solo se ....

4] (4 pt.) La funzione

$$f(x) = 1 + 2x - \arctan\Big(\frac{x}{2}\Big)$$

è strettamente monotona su tutto $\mathbb{R}$. Denotata $g = f^{-1}$, allora $g'(1) =$ ....

5] (4 pt.) Calcolare la derivata sesta in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + x^2)}{1 + 2x^4}.$$

Soluzione:

6] (2+5 pt.) Determinare (e specificare chiaramente) per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste finito il seguente limite e, in tali casi, calcolarlo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \log(1+x)} - \frac{x}{2} - \cos(ax)}{x \arctan^2(x/4)}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(**Bonus**) Sia f una funzione derivabile in un intervallo aperto contenente $[a, b]$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

(1) Se $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, allora $f'(x) = 0$ per almeno un $x \in (a, b)$.

(2) Se $f'(a) \neq f'(b)$, allora f' assume in (a, b) tutti i valori strettamente compresi fra $f'(a)$ e $f'(b)$.