Cognome............................ **Nome**....................... **Matricola**..................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (seconda prova di esonero)

18 gennaio 2016 proff. M.Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione A

1] (5 pt.) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge (precisando se si tratta di convergenza assoluta o semplice):

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (a+1)^n \, 2^{-n} \, a^{-n} \, \log^a n \, .$$

Soluzione:

2] (5 pt.) Dati la funzione $f(x) = e^{-x} - |x-2|$ e l'intervallo $I = (-\infty, 3)$, determinare l'insieme immagine $f(I)$.

$f(I) =$ ....

3] (2+3 pt.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Nel punto $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sin(5x^2)} & \text{se } \; 0 < x < \sqrt{\pi/5} \\ \\ (a-1)x + b & \text{se } \; x \le 0 \end{cases}$$

a) è continua se e solo se ....

b) è derivabile se e solo se ....

4] (4 pt.) Sia $f(x) = x^{g(x)}$ (per $x > 0$) dove $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che

$$g(2) = \frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad g'(2) = -\frac{1}{5} \, .$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

....

5] (4 pt.) Calcolare la derivata decima in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\mathrm{Sh}(x^2)}{\sqrt{1+x^4}} \, .$$

Soluzione:

6] (7 pt.) Stabilire (e specificare chiaramente) per quali $A, B, C \in \mathbb{R}$ esiste finito il seguente limite e, in tali casi, calcolarlo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)\cdot\sqrt{1-2\sin x} \;-1+Ax+Bx^2+Cx^3}{x-\sin x}$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(**Bonus**) Sia $\{a_n\}$ una successione in $(0,+\infty)$. Discutere la validità delle implicazioni tra le seguenti due affermazioni (fornendo le necessarie giustificazioni):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)a_n$ è convergente; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_n}$ è convergente.

Cognome............................. Nome........................ Matricola...................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (seconda prova di esonero)

18 gennaio 2016   proff. M.Salvatori, L. Vesely   durata: **90 minuti**   versione B

1] (5 pt.) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge (precisando se si tratta di convergenza assoluta o semplice):

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (a-2)^n \, 3^{-n} \, a^{-n} \, (\log n)^{-a} \, .$$

Soluzione:

2] (5 pt.) Dati la funzione $f(x) = |x-3| - e^{-x}$ e l'intervallo $I = (-1, +\infty)$, determinare l'insieme immagine $f(I)$.

$f(I) = \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3] (2+3 pt.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Nel punto $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sin^2(2x)} & \text{se } \; 0 < x < \pi/2 \\[2ex] (a+2)x + b & \text{se } \; x \le 0 \end{cases}$$

a) è continua se e solo se ....

b) è derivabile se e solo se ....

4] (4 pt.) Sia $f(x) = x^{g(x)}$ (per $x > 0$) dove $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che

$$g(3) = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad g'(3) = -\frac{1}{7} \, .$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 3$.

....

5] (4 pt.) Calcolare la derivata 18-esima in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + x^3)}{\sqrt{1 - x^{12}}} \, .$$

Soluzione:

6] (7 pt.) Stabilire (e specificare chiaramente) per quali $A, B, C \in \mathbb{R}$ esiste finito il seguente limite e, in tali casi, calcolarlo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)\cdot\sqrt{1+2\sin x}\ -1+Ax+Bx^2+Cx^3}{x(1+x^2-\cos x)}$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(**Bonus**) Sia $\{a_n\}$ una successione in $(0,+\infty)$. Discutere la validità delle implicazioni tra le seguenti due affermazioni (fornendo le necessarie giustificazioni):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)a_n$ è convergente; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_n}$ è convergente.

Cognome............................ Nome....................... Matricola..................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (seconda prova di esonero)

18 gennaio 2016 proff. M.Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione C

1] (5 pt.) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge (precisando se si tratta di convergenza assoluta o semplice):

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (a+3)^n \, 3^{-n} \, a^{-n} \, (\log n)^a \, .$$

Soluzione:

2] (5 pt.) Dati la funzione $f(x) = e^{-x} - |x-2|$ e l'intervallo $I = (-1, +\infty)$, determinare l'insieme immagine $f(I)$.

$f(I) =$ ....

3] (2+3 pt.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Nel punto $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\mathrm{Sh}(3x^2)} & \text{se } \ x > 0 \\ \\ (a+1)x + b & \text{se } \ x \leq 0 \end{cases}$$

a) è continua se e solo se ....

b) è derivabile se e solo se ....

4] (4 pt.) Sia $f(x) = x^{g(x)}$ (per $x > 0$) dove $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \qquad \text{e} \qquad g'\left(\frac{1}{2}\right) = -5 \, .$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = \frac{1}{2}$.

....

5] (4 pt.) Calcolare la derivata 15-esima in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\mathrm{Sh}(x^3)}{\sqrt{1+x^6}} \, .$$

Soluzione:

6] (7 pt.) Stabilire (e specificare chiaramente) per quali $A, B, C \in \mathbb{R}$ esiste finito il seguente limite e, in tali casi, calcolarlo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) \cdot \sqrt{1 + 2\sin x} - 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3}{x(e^x - 1 - x)}$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(**Bonus**) Sia $\{a_n\}$ una successione in $(0, +\infty)$. Discutere la validità delle implicazioni tra le seguenti due affermazioni (fornendo le necessarie giustificazioni):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n) a_n$ è convergente; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ è convergente.

Cognome............................ **Nome**....................... **Matricola**..................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (seconda prova di esonero)

18 gennaio 2016 proff. M.Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti** versione D

1] (5 pt.) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge (precisando se si tratta di convergenza assoluta o semplice):

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (a-4)^n \, 2^{-n} \, a^{-n} \, (\log n)^{-a} \, .$$

Soluzione:

2] (5 pt.) Dati la funzione $f(x) = |x-3| - e^{-x}$ e l'intervallo $I = (-\infty, 4)$, determinare l'insieme immagine $f(I)$.

$f(I) =$ ....

3] (2+3 pt.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Nel punto $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\mathrm{Sh}^2(4x)} & \text{se } \ x > 0 \\[2ex] (a-2)x + b & \text{se } \ x \leq 0 \end{cases}$$

a) è continua se e solo se ....

b) è derivabile se e solo se ....

4] (4 pt.) Sia $f(x) = x^{g(x)}$ (per $x > 0$) dove $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \qquad \text{e} \qquad g'\left(\frac{1}{3}\right) = -7 \, .$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = \frac{1}{3}$.

....

5] (4 pt.) Calcolare la derivata 12-esima in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1-x^8}} \, .$$

Soluzione:

6] (7 pt.) Stabilire (e specificare chiaramente) per quali $A, B, C \in \mathbb{R}$ esiste finito il seguente limite e, in tali casi, calcolarlo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)\cdot\sqrt{1-2\sin x} - 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3}{\log(1+2x) - 2x + 2x^2}$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(**Bonus**) Sia $\{a_n\}$ una successione in $(0, +\infty)$. Discutere la validità delle implicazioni tra le seguenti due affermazioni (fornendo le necessarie giustificazioni):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)a_n$ è convergente; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_n}$ è convergente.