Come "leggere" uno sviluppo di Taylor?

(L.V., gennaio 2015)

Siano I un intervallo, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I^\circ$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Supponiamo che f sia 3 volte derivabile in x_0 e che

$$f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3)\,, \quad x \to x_0.$$

Cerchiamo di dedurre (come un buon detective) il maggior numero di informazioni da queste ipotesi.

La definizione della derivabilità 3 volte in x_0 implica che esiste un intorno U di x_0 tale che f, f' siano derivabili (e quindi continue) in U, e che f'' (che esiste in U) sia derivabile (e quindi continua) in x_0. Inoltre, per l'unicità degli sviluppi di Taylor, la nostra formula coincide con lo sviluppo di Taylor di ordine 3 di f, centrato in x_0. Quindi

$$a = f(x_0),\ b = f'(x_0),\ c = \tfrac{1}{2}\,f''(x_0),\ d = \tfrac{1}{6}\,f'''(x_0).$$

In particolare, l'equazione $y = a + b(x - x_0)$ determina la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0.

Ricordiamo il seguente semplice fatto che ci servirà tra poco (nei punti (a1), (a2), (b1), (b2)).

Fatto. *Se g è una funzione continua in x_0 e $g(x_0) \neq 0$, allora $g(x)$ ha lo stesso segno di $g(x_0)$ in un opportuno intorno di x_0.*
(Ciò segue dal teorema di permanenza del segno.)

Ora possiamo discutere i vari **casi possibili**.

- **(a)** $\underline{b = 0}$ (cioè, x_0 è un punto stazionario)
  - **(a1)** $\underline{c > 0} \Rightarrow f$ è strettamente convessa in un intorno di x_0 e x_0 è un punto di minimo relativo stretto;
  - **(a2)** $\underline{c < 0} \Rightarrow f$ è strettamente concava in un intorno di x_0 e x_0 è un punto di massimo relativo stretto;
  - **(a3)** $\underline{c = 0}$
    - ∘ $\underline{d \neq 0} \Rightarrow x_0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale;
    - ∘ $\underline{d = 0} \Rightarrow$ in questo caso non abbiamo abbastanza informazioni per dire altro.
- **(b)** $\underline{b \neq 0}$ (e quindi x_0 non è estremante)
  - **(b1)** $\underline{c > 0} \Rightarrow f$ è strettamente convessa in un intorno di x_0;
  - **(b2)** $\underline{c < 0} \Rightarrow f$ è strettamente concava in un intorno di x_0;
  - **(b3)** $\underline{c = 0}$
    - ∘ $\underline{d \neq 0} \Rightarrow x_0$ è un punto di flesso a tangente obliqua;
    - ∘ $\underline{d = 0} \Rightarrow$ in questo caso non abbiamo abbastanza informazioni per dire altro.