Breve descrizione del

CONTENUTO DELLE LEZIONI

Analisi Matematica 1 (corso B)

corso di laurea triennale in FISICA

L. Vesely, 2014–2015

29/09/2014 [1 ora: n. 1]

- Introduzione al corso: organizzazione, contenuti.
- Classi numeriche:
  - Insieme dei *numeri naturali*: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
  - Insieme degli *interi nonnegativi*: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
  - Insieme dei *numeri interi (relativi)*: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
  - Insieme dei *numeri razionali*: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : \ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$.
- Le operazioni e l'ordine su $\mathbb{Q}$. Rappresentazione dei numeri razionali sulla retta.
- Allineamenti (sviluppi) decimali.
  Un *allineamento decimale* è una sequenza
  $$c_0, c_1c_2c_3 \dots ,$$
  dove $c_0 \in \mathbb{Z}$ e $c_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ per $k \geq 1$, tale che non termini con il periodo $\bar{9}$. Un *allineamento decimale periodico* è un allineamento che termini con un periodo (di qualche lunghezza finita), ad esempio,
  $$223, 45612612612\dots = 223, 45\overline{612}\,.$$
  Ad ogni numero razionale corrisponde un allineamento decimale *<u>periodico</u>*.
  Infatti, dato $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (dove $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$), è sufficiente svolgere la divisione $p : q$ per ottenere un allineamento decimale; inoltre, ragionando sui possibili resti che compaiono nello svolgimento della divisione (ve ne sono solo un numero finito: $0, 1, \dots, q-1$), si deduce facilmente che l'allineamento ottenuto è necessariamente periodico.

01/10/2014 [2 ore: 2,3]

- Vale anche il vice versa: *ogni allineamento decimale periodico proviene da un (e uno solo) numero razionale.*

  Quindi vi è una *corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei razionali* $\mathbb{Q}$ *e l'insieme degli allineamenti decimali periodici (non contenenti* $\overline{9}$*).* In altre parole, possiamo identificare un numero razionale con il suo allineamento (periodico).

- **Definizione.** Un *campo ordinato* è un insieme X su cui sono definite due operazioni binarie $+$ e $\cdot$ insieme ad una relazione d'ordine $<$ [più precisamente, è una quaterna ordinata $(X, +, \cdot, <)$], avente le seguenti proprietà:
  (a) $(X, +, \cdot)$ è un *campo*, cioè: le due operazioni algebriche sono commutative e associative, ciascuna ammette un elemento neutro ($0 \in X$ per la somma, $1 \in X$ per il prodotto), ogni $x \in X$ ammette un opposto $-x \in X$ e ogni $x \in X \setminus \{0\}$ ammette un inverso $x^{-1} \in X$; inoltre le due operazioni sono legate insieme dalla legge distributiva.;
  (b) $(X, <)$ è un *insieme (totalmente) ordinato*, cioè: la relazione $<$ è transitiva e ogni due elementi $x, y \in X$ sono confrontabili (vale a dire, si verifica una e una sola tra le seguenti: $x = y$, $x < y$, $y < x$);
  (c) le operazioni algebriche e la relazione d'ordine sono legate insieme dalle seguenti due proprietà:
  $x < y \ \Rightarrow\ x + z < y + z$, e $(x < y,\, z > 0) \ \Rightarrow\ xz < yz$.

- $\mathbb{Q}$ *è un campo ordinato*, mentre $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$ non lo sono.

- Ogni numero razionale positivo rappresenta una lunghezza, ma non tutte le lunghezze sono rappresentabili con numeri razionali. Ad es., $\sqrt{2}$ è una lunghezza (diagonale di un quadrato di lato unitario), ma: $\sqrt{2}$ *non è un numero razionale.*

- **Esercizi per voi.** Dimostrare:
  (i) $\sqrt[3]{7}$ è irrazionale;
  (ii) se $n \in \mathbb{N}$ non è una potenza di 10 allora $\log_{10} n$ è irrazionale;
  (iii) *(stimolante)* per ogni $k, n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[k]{n}$ è intero o irrazionale.

Numeri reali

- Definizione dei numeri reali come tutti gli allineamenti decimali (che non finiscano con $\bar{9}$). Ordine su $\mathbb{R}$ (ordine "lessicografico").

- Definizione di *intervallo* $I \subset \mathbb{R}$.
  Tipi di intervalli:
  $\emptyset$;
  $(a, b),\ [a, b),\ (a, b],\ [a, b]$,
  $(a, +\infty),\ [a, +\infty),\ (-\infty, b),\ (-\infty, b]$,
  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.
  Intervalli limitati/illimitati, aperti/chiusi/semiaperti.

- **Teorema (proprietà archimedea).** Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x < n$.

- **Corollario.** Per ogni $x > 0$ reale esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < x$.

- Densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: *se $x < y$ sono due numeri reali, allora l'intervallo (x, y) contiene infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali.*

06/10/2014 [2 ore: 4,5]

- Definizioni di:
  insieme limitato superiormente (inferiormente); insieme limitato;
  maggiorante (minorante) di A;
  il massimo (minimo) di A, denotati con $\max A$, $\min A$;
  l'estremo superiore (inferiore) di A, denotati con $\sup A$, $\inf A$.

- *Osservazione.* Se $x = \max A$ allora anche $x = \sup A$, ma non vale il vice versa.

- *Osservazione.* $x = \sup A$ se e solo se valgono le segenti due proprietà:
  (a) $\forall a \in A$: $a \leq x$ (cioè, x è un maggiorante di A), e
  (b) $\forall y < x\ \exists a \in A$: $y < a$ (cioè, nessun numero reale $y < x$ è maggiorante di A).
  La proprietà (b) può essere espressa anche in questo modo equivalente:
  (b') $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A$: $x - \varepsilon < a$.

- *Esempi.* Max, min, sup, inf dei seguenti insiemi:
  $A = (0, 3]$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 4|x| \leq 0\}$, $C = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
  $D = \{x \in \mathbb{Q} :\ x^2 \leq 2,\ x^3 \geq 1\}$.

- **Teorema (completezza di $\mathbb{R}$, ovvero la proprietà dell'estremo superiore).**
  Per ogni insieme non vuoto e limitato superiormente [inferiormente] $A \subseteq \mathbb{R}$ esiste $\sup A$ *[*$\inf A$*].*

- *Significato intuitivo del teorema della completezza:* i numeri reali, se rappresentati su una retta, riempiono tutta la retta. In altre parole, i numeri reali possono rappresentare tutte le distanze che compaiono in geometria.
  Si osservi che *il campo ordinato* $\mathbb{Q}$ *non è completo.*

- *Numeri reali estesi:* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
  Ordinamento su $\overline{\mathbb{R}}$.

- **Convenzione.** Se $A \subset \mathbb{R}$ è illimitato superiormente [inferiormente], definiamo $\sup A := +\infty$ [$\inf A := -\infty$].
  Inoltre, definiamo: $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.

- **Operazioni algebriche in** $\mathbb{R}$: *l'idea di come definirle.*
  Dati un numero reale $x = m, c_1 c_2 c_3 \ldots$ e $n \in \mathbb{N}$, possiamo definire *la n-esima troncata di x* come il numero razionale

  $$x^{(n)} = m, c_1 \ldots c_n \overline{0}\,.$$

  Se $x > 0$, allora $0 \leq x - x^{(n)} < 10^{-n}$, da cui si dimostra che
  $x = \sup\{x^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$.

  Ora, per $x > 0, y > 0$, possiamo definire:
  $x + y := \sup\{x + y^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$,
  $x - y := \inf\{x - y^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$,
  $xy := \sup\{x^{(n)} y^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$,
  $\frac{1}{y} := \inf\{\frac{1}{y^{(n)}} : n \in \mathbb{N}\}$,
  $\frac{x}{y} := x \cdot \frac{1}{y}$.

  Le operazioni si estendono in modo del tutto naturale a numeri reali non necessariamente maggiori di 0.

- **Teorema.**
  Con le sue operazioni algebriche e la relazione d'ordine, $\mathbb{R}$ *è un campo ordinato completo* (cioè, con la proprietà del "sup") *di cui* $\mathbb{Q}$ *è un sottocampo.*

- **Una curiosità.**
  A meno di isomorfismi, $\mathbb{R}$ è l'unico campo ordinato completo, cioè, se $(X, \oplus, \odot, <_X)$ è un campo ordinato completo, esiste una corrispondenza biunivoca tra X e $\mathbb{R}$ che "rispetta le operazioni algebriche e l'ordinamento di X e quelli di $\mathbb{R}$". In parole povere, gli elementi di X possono essere identificati con numeri reali senza compromettere le operazioni e l'ordine di X.

08/10/2014 [2 ore: 6,7]

Ulteriori proprietà di $\mathbb{R}$

- *Proprietà archimedea.* Abbiamo già parlato della proprietà archimedea:

  $\mathbb{N}$ non ha maggioranti in $\mathbb{R}$

  (cioè, $\mathbb{N}$, come sottoinsieme di $\mathbb{R}$, è illimitato superiormente).

  Vale anche la sua forma generale:
  $$\forall x > 0 \ \forall y > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \ nx > y \, .$$
  (Infatti, è sufficiente prendere $n \in \mathbb{N}$ in modo che $n > \frac{y}{x}$.)

- Esistenza della radice n-esima per ogni $x > 0$. Estensione a $x = 0$ (per ogni $n \in \mathbb{N}$) e a $x < 0$ (per n dispari).
  Definiamo inoltre $x^{1/n} := \sqrt[n]{x}$ qualora il secondo membro è definito.

- *Potenze razionali.* Dati $m, n \in \mathbb{N}$, definiamo
  $$x^{m/n} := \sqrt[n]{x^m}$$
  e anche
  $$x^{-m/n} := \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$$
  per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui le espressioni al secondo membro hanno senso.

- *Potenze reali.* Definizione di x^p (con $p > 0$) per $x \geq 1$, per $x \in (0, 1)$. Estensione a $p < 0$.
  <u>N.B.</u>: Se p è irrazionale, la potenza x^p non è definita per $x < 0$.

- *Esistenza di logaritmi.* Per ogni $1 \neq b > 0$ e ogni $x > 0$, l'equazione
$$b^y = x$$
ha una e una sola soluzione $y \in \mathbb{R}$. Tale y viene chiamato *logaritmo in base b di x* e denotato con
$$\log_b x \,.$$

- *Esercizio di due volte fa.* Dimostrare che, se $n \in \mathbb{N}$ non è una potenza di 10, allora $\log_{10} n \notin \mathbb{Q}$.

  Breve svolgimento.
  Supponiamo che $\log_{10} n = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$. Allora $10^{p/q} = n$, da cui
$$10^p = n^p \,.$$
  Consideriamo la fattorizzazione in primi di 10 e di $\widetilde{n}$: $10 = 2 \cdot 5$ e
$$n = 2^a 5^b \, \widetilde{n}$$
  dove $a, b \in \mathbb{N}_0$ e il numero $\widetilde{n} \in \mathbb{N}_0$ non è divisibile per 2 né per 5. Sostituendo nell'uguaglianza precedente, otteniamo
$$2^p 5^p = 2^{qa} 5^{qb} \, \widetilde{n}^q.$$
  Si noti che $\widetilde{n}^q$ non è divisibile per 2 né per 5. Dall'unicità della fattorizzazione in primi ora segue che
$$p = qa, \quad p = qb, \quad \widetilde{n} = 1.$$
  In particolare, $n = 10^{p/q} = 10^a$ è una potenza di 10 perché $a \in \mathbb{N}_0$. Ciò completa la dimostrazione *(perché?)*.

- *Esempi.*
  Grafici di: $x^{2/3}$, $x^{7/5}$, $x^{3/8}$, $x^{-3/5}$, $x^{-7/6}$, $x^{-4/3}$, $x^{\sqrt{2}}$, $x^{\sqrt{3}/2}$, $x^{-2\sqrt{5}}$.

- *Esercizio.*
  (i) La somma e il prodotto di due razionali sono numeri razionali.
  (ii) La somma di un razionale e un irrazionale è un numero irrazionale.
  (iii) Il prodotto di un razionale non nullo e un irrazionale è irrazionale.
  (iv) La somma di due irrazionali può essere razionale o irrazionale, e lo stesso vale per il prodotto.

Spazi euclidei

- Ripasso: il *prodotto cartesiano* $X \times Y$ di due insiemi X, Y è definito come
$$X \times Y := \big\{(x, y): \ x \in X, \ y \in Y\big\},$$
cioè, l'insieme di tutte le coppie ordinate aventi al primo posto un elemento di X e al secondo un elemento di Y.
Analogamente, gli elementi del prodotto cartesiano $X \times Y \times Z$ saranno terne ordinate, e quelli di $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ (prodotto cartesiano di n insiemi $X_1, \dots, X_n$) saranno n-uple ordinate.
Se X è un insieme e $n \in \mathbb{N}$, definiamo
$$X^n := X \times X \times \cdots \times X \qquad (n \text{ volte}).$$

- *Spazio euclideo di dimensione n :*
$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}.$$
I suoi elementi sono *vettori* $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$.
Con *scalari* intendiamo elementi di $\mathbb{R}$.

- Operazioni: somma di due vettori, prodotto di uno scalare e un vettore, prodotto interno (scalare) di due vettori. Alcune proprietà delle operazioni.

13/10/2014 [2 ore: 8,9]

- Norma (euclidea) in $\mathbb{R}^n$: $\quad \|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$.

- Significato geometrico di: $\underline{x} + \underline{y}$, $\alpha\,\underline{x}$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$), $\quad \|\underline{x}\|$.
L'angolo φ di due vettori non nulli:
$$\cos\varphi = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\|}.$$
Si noti che, nel calso di due *versori* (cioè, quando $\|\underline{x}\| = \|\underline{y}\| = 1$), si ha $\cos\varphi = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$.

- *Proprietà della norma* (dimostrate):
nonnegatività; annullamento; omogeneità; disuguaglianza triangolare (in due forme); disuguaglianza di Cauchy.

- Nel caso particolare di $n = 1$ (cioè, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, dove il prodotto interno coincide con il prodotto, e la norma coincide con il valor assoluto), le due forme della disuguaglianza triangolare ci danno:
$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \le |x \pm y| \le |x| + |y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

- Distanza: $d(\underline{x}, \underline{y}) := \|\underline{x} - \underline{y}\|$.

- *Approfondimento culturale – altre norme su $\mathbb{R}^n$.*
Diciamo che una funzione reale $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ su $\mathbb{R}^n$ è una *norma* se soddisfa le seguenti proprietà:
(i) $|\!|\!|\underline{x}|\!|\!| \ge 0$;
(ii) $|\!|\!|\underline{x}|\!|\!| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$;
(iii) $|\!|\!|t\underline{x}|\!|\!| = |t| \cdot |\!|\!|\underline{x}|\!|\!|$;
(iv) $|\!|\!|\underline{x} + \underline{y}|\!|\!| \le |\!|\!|\underline{x}|\!|\!| + |\!|\!|\underline{y}|\!|\!|$.
Osserviamo che la norma euclidea $\| \cdot \|$ soddisfa questa definizione.
Esempi di norme su $\mathbb{R}^n$.
  - $\|\underline{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$
  - $\|\underline{x}\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i|$
  - Per $p \ge 1$ numero reale: $\|\underline{x}\|_p := \big(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p \big)^{1/p}$
  (per le norme $\| \cdot \|_p$, la dimostrazione della disuguaglianza triangolare non è facile). Si noti che il caso $p = 2$ corrisponde alla norma euclidea, e il caso $p = 1$ è il primo di questi esempi.

Teorema. Sia $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ una qualsiasi norma su $\mathbb{R}^n$ (e $\| \cdot \|$ la norma euclidea). Allora esistono costanti reali $b \ge a > 0$ tali che
$$a\|\underline{x}\| \le |\!|\!|\underline{x}|\!|\!| \le b\|\underline{x}\| \quad \text{per ogni } \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

- **Ripasso su funzioni.**
Nozione di *funzione* $f\colon X \to Y$ dove X, Y sono due insiemi non vuoti.
X è l'*insieme di partenza*, Y è l'*insieme d'arrivo*,
$f(X)$ è l'*insieme immagine.*
<u>Non</u> utilizzeremo il termine "codominio".
Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche (o biiettive).
Se $f\colon X \to Y$ è biunivoca, possiamo definire la *funzione inversa* $f^{-1}\colon Y \to X$.
Se $f\colon X \to Y$ è solamente iniettiva, la stessa funzione vista come $f\colon X \to f(X)$ (che formalmente è una funzione diversa) è biunivoca, e quindi esiste $f^{-1}\colon f(X) \to X$.

- *Due esercizi.* Consideriamo le seguenti funzioni:
  - $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(p, q) := \frac{p}{q}$;

- ∘ $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $g(r) := (p, q)$ dove $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ è tale che $r = \frac{p}{q}$ con p, q primi tra loro.

Esse sono iniettive?; suriettive?
(f è suriettiva ma non è iniettiva; g non è suriettiva ma è iniettiva.)

15/10/2014 [2 ore: 10,11]

- **Successioni.** Sia X u insieme non vuoto. Una *successione di elementi di* X (o semplicemente, successione in X) è, in parole povere, una sequenza infinita

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \qquad \text{con } x_n \in X$$

con eventuali ripetizioni. In altre parole, ad ogni $n \in \mathbb{N}$ viene associato un elemento $x_n \in X$. Otteniamo così la definizione formale:
una successione in X *è una qualsiasi funzione* $f\colon \mathbb{N} \to X$.
Il suo *termine* n*-esimo* è $x_n := f(n) \in X$.

Esempio di una successione in $\mathbb{N}$ (o in $\mathbb{R}$):

$$\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots\}.$$

<u>*Esercizio per voi.*</u> Qual è il 150^o termine di questa successione?

Potenza (cardinalità) di un insieme

- Insiemi equipotenti (notazioni: $X \sim Y$, $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathrm{Y}$).
Diciamo che $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ se X è equipotente ad un sottoinsieme (non necessariamente proprio) di Y.
Diciamo che $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$ se $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ e X, Y non sono equipotenti.
La "$\sim$" è una relazione di equivalenza (rifl., simm., transit.). Esempi.

- Insiemi finiti (cioè, l'insieme vuoto e gli insiemi equipotenti a qualche $\{1, 2, \ldots, n\}$), insiemi infiniti.

- *Insiemi numerabili* – definizione. Esempi: $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}$ sono numerabili.

1. Un sottoinsieme infinito di un numerabile è anch'esso numerabile. (In altre parole, la potenza del numerabile è la più piccola cardinalità infinita.)

2. L'unione di due (o di un numero finito di) insiemi numerabili è numerabile.
L'unione di una successione di insiemi numerabili è numerabile.

3. Il prodotto cartesiano di un numero finito di insiemi numerabili è numerabile.

4. *Corollario.* $\mathbb{Q}$ è numerabile. (Infatti, è equipotente ad un sottoinsieme infinito di $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.) Lo stesso vale per ogni $\mathbb{Q}^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

5. Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.

Corollario interessante. Se X è infinito e Y è finito o numerabile allora $X \cup Y \sim X$.

6. Osservazione: $\mathbb{R} \sim (0,1)$.

Esercizio per voi. Dimostrate che ogni intervallo non degenere $I \subset \mathbb{R}$ è equipotente a $\mathbb{R}$.

7. *Teorema di Cantor.* $\mathbb{R}$ non è numerabile. Di conseguenza,

$$\operatorname{card} \mathbb{R} > \operatorname{card} \mathbb{N}\,.$$

(In altre parole, la *cardinalità del continuo* è maggiore della cardinalità del numerabile.)

8. *Corollario.* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (l'insieme degli irrazionali) è equipotente a $\mathbb{R}$ (e quindi non è numerabile).

- *Insieme $\mathcal{P}(X)$ delle parti di X* è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X, inclusi X e l'insieme vuoto.

  Esercizio per voi. Per $X = \{1, 2, 3\}$, determinate l'insieme $\mathcal{P}(X)$.

9. Alcuni fatti interessanti, non dimostrati a lezione.

(i) Per ogni X, $\operatorname{card} \mathcal{P}(X) > \operatorname{card} X$.
(Se X è finito con $\operatorname{card} X = n$, allora $\operatorname{card} \mathcal{P}(X) = 2^n$.)

(ii) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.

(iii) $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Per ogni due insiemi X, Y vale una e una sola delle seguenti tre possibilità:
$\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathrm{Y}\,, \quad \operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathrm{Y}\,, \quad \operatorname{card} X > \operatorname{card} \mathrm{Y}\,.$
(Questa proprietà naturale non è per niente ovvia dalle definizioni!)

- *Notazioni delle cardinalità del numerabile e del continuo:*
$$\mathrm{card}(\mathbb{N}) =: \aleph_0 , \quad \mathrm{card}(\mathbb{R}) =: \mathfrak{c} .$$
($\aleph$ è la lettera ebraica *aleph*, mentre $\mathfrak{c}$ è una c gotica.)

20/10/2014 [2 ore: 12,13]

- *Esercizio per voi.* Siano X, Y due insiemi non vuoti. Quando (in termini di cardinalità) esiste una funzione $f \colon X \to Y$:
(i) iniettiva? ;
(ii) suriettiva?
(Giustificate bene la risposta!)

Spazi metrici

- Definizione di spazio metrico (X, d).

- In uno spazio metrico (X, d), dati un punto $x \in X$ e $r > 0$, l'*intorno (sferico)* di x di raggio r è l'insieme
$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} .$$

- **Esempi.**
(i) Metrica data da una norma $\| \cdot \|$ su $\mathbb{R}^n$: $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$. Tale metrica è sempre *invariante per traslazioni.*
Esempi particolari, la forma degli intorni in tali esempi.
(ii) Metrica data da una funzione iniettiva $f \colon X \to \mathbb{R}$: $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Tale metrica può essere limitata o non invariante per traslazioni.
Esempi (su $\mathbb{N}$ e su $\mathbb{R}$).
(iii) *Metrica discreta* su un insieme X:
$$d(x, y) = 0 \text{ se } x = y; \; d(x, y) = 1 \text{ se } x \neq y.$$
Forma degli intorni nella metrica discreta.
(iv) Esempio di una metrica a tre valori:
$X =$ l'insieme delle persone presenti nell'aula;
$d(x, y) = 0$ se $x = y$; $d(x, y) = 1$ se x, y sono diversi ma dello stesso sesso; $d(x, y) = 2$ altrimenti.
(v) Metrica "delle due stanze".

- Definizioni di: *punto interno*, *punto esterno*, *punto di frontiera.*
  Notazioni:
  A° è l'*interno* di A, cioè, l'insieme dei punti interni di A;
  ∂A è la *frontiera* di A, cioè, l'insieme dei punti di frontiera di A.

- Vari esempi, soprattutto in $\mathbb{R}$.

22/10/2014 [2 ore: 14,15]

- La proprietà di Hausdorff.

- Definizione di: *punto isolato*, *punto di accumulazione.*
  A' denota l'insieme dei punti di accumulazione (o l'*insieme derivato*) dell'insieme A.

- *Osservazione.* Se $x \in A'$, allora ogni intorno di x contiene infiniti punti di A.

  Corollario. Se A è finito allora $A' = \emptyset$.

- Esempi.

- Definizione di: *insieme aperto*, *insieme chiuso.*

- *Lemma.* Ogni intorno sferico $B(x, r)$ è un insieme aperto.

- *Ripasso* delle leggi di De Morgan:
  (a) il complementare di un'unione è l'intersezione dei complementari;
  (b) il complementare di un'intersezione è l'unione dei complementari.

- **Teorema.**
  (a) *Le unioni (qualsiasi) di aperti sono insiemi aperti.*
  (b) *Le intersezioni finite di aperti sono insiemi aperti.*
  (a') *Le intersezioni (qualsiasi) di chiusi sono insiemi chiusi.*
  (b') *Le unioni finite di chiusi sono insiemi chiusi.*

- *Esempi.* $A_n = (-1/n, 1/n)$, $B_n = [1/n, 2]$ $(n \in \mathbb{N})$. Allora:
  (a) gli A_n sono tutti aperti, ma $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ non lo è;
  (b) i B_n sono tutti chiusi, ma $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ non lo è.

- **Teorema.** *Siano:* (X, d) *uno spazio metrico e* $A \subset X$*. Allora le seguenti sono equivalenti:*
  (i) A *è chiuso;*
  (ii) A *contiene tutti i suoi punti di frontiera;*

(iii) *A contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

27/10/2014 [2 ore: 16,17]

- Un insieme può essere: aperto, chiuso oppure *né aperto né chiuso.*

- *Definizione.* La *chiusura* di un insieme A: $\overline{A} := A \cup A'$.

- *Esempi.*
  (i) Chiusura degli insiemi: $A = [0,1)$, $B = \mathbb{N}$, $C = \mathbb{Q}$,
  $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
  (ii) Sia $E = E_1 \cup E_2$ dove
  $E_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \big[(0,1) \cap \mathbb{Q}\big] \cup (2,3)\Big\}$,
  $E_2 = \Big\{(4 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\Big\}$. Determinare: E°, ∂E, E', $\overline{E}$.
  (Commento. In esercizi di questo tipo ci sono tre cose da saper fare: 1) capire come è fatto l'insieme dato, 2) capire come sono fatti gli insiemi richiesti, 3) scrivere in modo corretto gli insiemi richiesti.)

- **Teorema (proprietà della chiusura).**
  (i) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
  (ii) $\overline{A}$ è un insieme chiuso contenente A.
  (iii) $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso contenente A, cioè, se C è chiuso e $A \subset C$ allora $\overline{A} \subset C$.
  (iv) A è chiuso se e solo se $\overline{A} = A$.

  Idea di una dimostrazione di (ii). Basta dimostrare che $\overline{A}$ contiene i suoi punti di accumulazione. Abbiamo (per alcuni passaggi si veda l' "Esercizio per voi" che segue):
  $(\overline{A})' = (A \cup A')' = A' \cup (A')' = A' \subset \overline{A}$.

- **Esercizio per voi.**
  (i) Dimostrare che $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
  (ii) Dimostrare che $(A')' \subset A'$.

- Definizione di *diametro* di un insieme non vuoto A (notazione diam A). L'insieme A viene detto *limitato* se $A = \emptyset$ oppure $A \neq \emptyset$ con diam $A < +\infty$.

- Per $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $\operatorname{diam} A = \sup A - \inf A$.
  Di conseguenza, A è limitato (secondo la definizione in spazi metrici) se e solo A è limitato sia superiormente sia inferiormante (e quindi limitato secondo la definizione data nel capitolo su numeri reali).

- **Teorema (proprietà di insiemi limitati).**
  (i) Ogni intorno sferico $B(x,r)$ è limitato e il suo diametro è $\leq 2r$.
  (In $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam} B(x,r) = 2r$. Invece, in uno spazio metrico discreto avente più di un punto, $\operatorname{diam} B(x,r)$ vale 0 se $r \leq 1$, e vale 1 se $r > 1$.)
  (ii) Sottoinsiemi di insiemi limitati sono limitati.
  (iii) A è limitato se e solo se $A \subset B(x,r)$ per qualche $x \in X, r > 0$.
  (iv) *Esercizio per voi.* Sia $x_0 \in X$ fissato. Allora: A è limitato se e solo se $A \subset B(x_0,r)$ per qualche $r > 0$.
  (v) Ogni insieme finito è limitato.
  (vi) L'unione di un numero finito di insiemi limitati è un insieme limitato.
  (Ciò ovviamente non vale per unioni infinite: $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}$.)

- *Ripasso:* successioni in X.
  Attenzione, una successione (ad es., $\{1,2,3,1,2,3,1,2,3,\ldots\}$) è una cosa diversa dal suo insieme immagine (nel nostro esempio, $\{1,2,3\}$).

  Una successione $\{x_n\}$ (in uno spazio metrico) è detta *limitata* se il suo insieme immagine $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato.

- **Proprietà valide definitivamente.** Sia $\mathcal{P}$ una proprietà che un numero naturale può avere o meno. Diciamo che $\mathcal{P}$ *vale definitivamente* se vale per ogni $n \in \mathbb{N}$ che sia sufficientemente grande, cioè,

  se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{P}$ valga per ogni $n \geq n_0$.

- *Osservazione utile.* Supponiamo che ciascuna delle proprietà $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ valga definitivamente. Allora anche la proprietà $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ vale definitivamente.

- *Esempi.*
  (i) La proprietà " essere pari" non vale definitivamente (anche se vale per infiniti $n \in \mathbb{N}$).
  (ii) $n^2 - 1000n - 2000 > 0$ definitivamente.

29/10/2014 [2 ore: 18,19]

- *Osservazione.* Una proprietà $\mathcal{P}$ vale definitivamente se e solo se vale per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus F$ dove F è un opportuno insieme finito.

Successioni in spazi metrici

- Definizione di "$x_n \to p$". Definizione di *successione convergente.*

- *Osservazione.* Ciascuna delle seguenti affermazioni è equivalente a dire che $x_n \to p$.
  (i) $\forall \varepsilon > 0$: $d(x_n, p) \leq \varepsilon$ definitivamente.
  (ii) $\forall \varepsilon > 0$: $d(x_n, p) < 10\varepsilon$ definitivamente.
  (iii) $\forall \varepsilon > 0$: $d(x_n, p) \leq \sqrt{\varepsilon}$ definitivamente.

- Teorema di *unicità del limite.*

- Esempi.

- *Osservazioni.*
  (i) Se $x_n = y_n$ definitivamente, allora: $x_n \to p \Leftrightarrow y_n \to p$.
  (ii) $x_n \to p$ in (X, d) se e solo se $d(x_n, p) \to 0$ in $\mathbb{R}$.

- Una *sottosuccessione* di $\{x_n\}$ è una qualsiasi successione del tipo $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ dove $n_1 < n_2 < \dots$ sono numeri naturali.
  Ciascuna delle seguenti successioni è una sottosuccessione di $\{\frac{1}{n}\}$:
  $\{\frac{1}{2k}\}$, $\{\frac{1}{n!}\}$, $\{\frac{1}{m+3}\}$.

- **Teorema.** Una successione converge a p se e solo se tutte le sue sottosuccessioni convergono a p.

- **Teorema.** Ogni successione convergente è limitata.

- **Successioni in spazi euclidei.**
  Per non dover utilizzare due indici, useremo la seguente notazione per le coordinate di un vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$:
  $$\underline{x} = \big(x(1), x(2), \dots, x(d)\big) .$$
  Iniziamo con il seguente lemma che ci darà la possibilità di dimostrare velocemente il teorema base sulla convergenza in $\mathbb{R}^d$.
  - **Lemma.** Per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$ si ha:
    $$\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\| \leq \|\underline{x}\|_1 \leq d\|\underline{x}\|_\infty$$
    (per le definizioni delle norme si veda la lezione del 13/10).

- ○ **Teorema.** Una successione $\{\underline{x}_n\}$ in $\mathbb{R}^d$ converge a $\underline{p}$ in $\mathbb{R}^d$ se e solo se vi "converge per coordinate", cioè,
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, d\} : \quad x_n(i) \to p(i) \ \text{ per } n \to +\infty.$$

Successioni di numeri reali

- Definizioni di $x_n \to p^+$ (*per eccesso* o *da destra*) e $x_n \to p^-$ (*per difetto* o *da sinistra*).
- **Esercizio per voi.** Consideriamo (in $\mathbb{R}$) la metrica
$$\overline{d}(x, y) = |\arctan x - \arctan y|.$$
Dimostrare che $x_n \to p$ nella metrica $\overline{d}$ se e solo se $x_n \to p$ nella usuale metrica euclidea.

03/11/2014 [2 ore: 20,21]

- Per capire la definizione di limiti infiniti, l'idea principale è compresa nelle seguenti due convenzioni:
  - ○ intorni di $+\infty$ sono gli intervalli del tipo $(M, +\infty)$ (con $M \in \mathbb{R}$);
  - ○ intorni di $-\infty$ sono gli intervalli del tipo $(-\infty, M)$ (con $M \in \mathbb{R}$).
- Definizione di $x_n \to +\infty$ e di $x_n \to -\infty$.
- **Esercizio per voi (II parte).** Consideriamo la funzione iniettiva $f \colon \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, data da
$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{se } x \in \mathbb{R}, \\ \pm\infty & \text{se } x = \pm\infty \end{cases}$$
e la metrica $\overline{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|$ su $\overline{\mathbb{R}}$. Data una successione $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$, dimostrare che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:
  (i) $x_n \to +\infty$ (secondo la nostra definizione);
  (ii) $x_n \to +\infty$ nello spazio metrico $(\overline{R}, \overline{d})$.
- Definizione di *comportamento di una successione* (successioni *regolari*, cioè quelle *convergenti* e quelle *divergenti*; successioni irregolari ovvero *oscillanti*). Esempi.
- Operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$.
- Teorema su limiti e le operazioni algebriche.

- **Teorema (limiti e funzioni elementari).** Sia f una delle funzioni elementari (cioè, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e quelle trigonometriche inverse) con l'insieme di definizione D ($\subset \mathbb{R}$). Se $\{x_n\} \subset D$, $x \in D$ e $x_n \to x$, allora anche $f(x_n) \to f(x)$.

- **Notazione.** Se $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{R}$, $y_n \neq 0$ almeno definitivamente e
$$\frac{x_n}{y_n} \to 0\,,$$
allora scriveremo
$$x_n \ll y_n \quad \text{oppure} \quad x_n = o(y_n).$$
(La seconda formula, che è quella standard, si legge "x_n è *o piccolo* di y_n".)

- **Teorema (gerarchia di infiniti).** Siano $a > 1$, $b > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Allora
$$\log_b^\beta n \ \ll \ n^\alpha \ \ll \ a^n \ \ll \ n! \ \ll \ n^n\,.$$

- Esempi vari, di cui uno, "articolato", con un parametro:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^3} + n^{2a}}{n - n^{a^2}}$$
(a lezione svolti solo due dei 7 casi particolari [$a < -1$ e $a = -1$]).

05/11/2014 [2 ore: 22,23]

- *Teorema della permanenza del segno* – con dimostrazione.

- *Teorema del confronto* – con dim.

- *Corollario.* Se $x_n \to 0$ e $\{y_n\}$ è limitata allora $x_n y_n \to 0$.

- Ripasso: il comportamento delle successioni geometriche $\{q^n\}$.

- **Teorema (criterio del rapporto).** *Sia $\{x_n\}$ una successione di numeri reali non nulli. Supponiamo che esista il limite*

(1)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \ell$$

(che ovviamente appartiene a $[0, +\infty]$).
(a) *Se $\ell < 1$, allora esistono $c > 0$ e $q \in (0,1)$ tali che*
$$|x_n| \leq c\, q^n \quad \textit{definitivamente},$$
e quindi $x_n \to 0$.

(b) *Se* $\ell > 1$, *allora esistono* $c > 0$ *e* $q > 1$ *tali che*

$$|x_n| \geq c\, q^n \quad \textit{definitivamente},$$

e quindi $|x_n| \to +\infty$.

N.B.: Il criterio non dice niente a proposito del caso $\ell = 1$.

- **Esercizio importante (criterio della radice).** Dimostrate che *lo stesso teorema vale anche se il limite* (1) *viene sostituito con*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \ell\,.$$

(In questo caso non è necessario supporre che $x_n \neq 0$.)

- **Teorema (gerarchia di infiniti – una generalizzazione).** Siano $a > 1$, $b > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Se $\{z_n\}$ è una successione in $(0, +\infty)$ tale che $z_n \to +\infty$, allora

$$\log_b^\beta z_n \ll (z_n)^\alpha \ll a^{z_n} \ll [z_n]! \ll (z_n)^{z_n}\,.$$

($[t]$ denota la parte intera di t).

Con dim. (quasi) completa.

- **Successioni monotone** - definizione di: successione *strettamente crescente*; succ. *strettamente decrescente*; succ. *non decrescente* o *crescente in senso lato*; succ. *non crescente* o *decrescente in senso lato.*

10/11/2014 [2 ore: 24,25]

- **Teorema (limiti di successioni monotone).** Ogni successione monotona è regolare, cioè, è convergente o divergente. Più precisamente:
  (i) se $\{x_n\}$ è monotona crescente (almeno) in senso lato, allora $x_n \to \ell := \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
  (ii) se $\{x_n\}$ è monotona decrescente (almeno) in senso lato, allora $x_n \to \ell := \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

- *Corollario.* Ogni successione monotona e limitata è convergente.

- **Teorema (il numero di Nepero e).**
  La successione
  $$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
  è strettamente crescente e limitata. Quindi essa è convergente:
  $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e \in \mathbb{R} \quad \textit{dove } e > 0. \tag{2}$$
  Si può dimostrare che il numero e è irrazionale con
  $$e = 2{,}718281828459\ldots .$$

- *Successioni asintotiche* – definizione e *proprietà principali*: il simbolo di "asintotico" si comporta bene con prodotti, rapporti, potenze, *ma non con somme o esponenziali!*.
  A proposito di logaritmi: supponiamo che $x_n \sim y_n$; se $x_n \to +\infty$ o $x_n \to 0^+$ allora $\log x_n \sim \log y_n$. (Se invece $x_n \to 1$, la relazione $\log x_n \sim \log y_n$ può essere falsa.)

- **Limiti notevoli** – si veda il file "Limiti notevoli".

- Esempio: $\lim n^a \left(\sqrt[5]{n^5+n^3} - n\right)$.

12/11/2014 [2 ore: 26,27]

- Due esempi di errori.

- $x_n = (n^2+1)^{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}$

- Due dei nostri limiti notevoli possono essere scritti in questa forma: se $1 \neq t_n \to 1$ e $a \neq 0$ allora:
  $$\log t_n \sim (t_n - 1), \;\; t_n^a - 1 \sim a(t_n - 1).$$

- $x_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^a(2\log(n+1)-\log(n^2+1))}$

- Ripasso: definizione di $x_n = o(y_n)$ (*"o piccolo"*). Significato in parole povere: x_n è trascurabile rispetto a y_n.

  Limiti notevoli scritti usando "o piccolo" (vedi il file "Versione 2" online).

- $x_n = \left(\sqrt[4]{n} + n^b\right)^{2014} - \left(\sqrt[4]{n} - n^b\right)^{2014}$ con $b < \frac{1}{4}$.
  (Due metodi di soluzione: a) con "asintotico", raccogliendo il secondo termine; b) con "o piccolo" raccogliendo $(\sqrt[4]{n})^{2014}$.)

- Qualche volta i limiti notevoli non bastano per calcolare un limite: ad es., $\lim n^3(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n})$.

- $x_n = \sqrt[n]{n}$

- Con i nostri metodi non riusciamo a calcolare il limite di $\sqrt[n]{n!}$.
  Usando la *formula di Stirling* $n! \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$, si calcola che $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

- $x_n = \left(2\sqrt[n]{n} + \cos\frac{1}{n} - 2\right)^n$

17/11/2014 [2 ore: 28,29]

Condizione di Cauchy e completezza

- *Definizione.* Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione $\{x_n\} \subset X$ *soddisfa la condizione di Cauchy* (oppure *è una successione di Cauchy*) se
  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ per ogni } m, n \geq n_0.$$
  Ciò equivale a dire che
  $$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} = 0\,.$$

- *Proposizione.* Per una successione $\{x_n\}$ (in uno spazio metrico X) valgono le seguenti implicazioni:
  $$\{x_n\} \text{ è convergente in } X \;\Rightarrow\; \{x_n\} \text{ è di Cauchy} \;\Rightarrow\; \{x_n\} \text{ è limitata,}$$
  mentre le implicazioni inverse sono false.

- *Esempi di succesisoni di Cauchy non convergenti:*
  (i) $X = (0, 1]$, $x_n = 1/n$;
  (ii) $X = \mathbb{Q}$, $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ tale che $x_n \to \sqrt{2}$ (in $\mathbb{R}$);
  (iii) $X = \mathbb{N}$ con la metrica $d(m, n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$, $x_n = n$.

- *Definizione.* (X, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy $\{x_n\} \subset X$ è convergente in X.

- **Lemma importante** *(Principio di intervalli chiusi inscatolati)***.**
  Consideriamo una successione di intervalli (chiusi e limitati)
  $$I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R} \qquad\qquad (n \in \mathbb{N})$$
  tali che $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$. Allora:
  (a) l'intersezione $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ non è vuota;
  (b) se $\operatorname{diam} I_n \to 0$, allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{p\}$; inoltre, $a_n \to p^-$ e $b_n \to p^+$.

  Idea della dimostrazione: essendo monotone e limitate, le successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ convergono (a α, β, rispettivamente). Si dimostra che $\alpha \leq \beta$ e $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ coincide con $[\alpha, \beta]$.

- **Teorema.** $\mathbb{R}$ *è uno spazio metrico completo.*
  Idea della dimostrazione: data una successione di Cauchy $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, considerare le "code"
  $$C_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
  e applicare il principio di intervalli chiusi inscatolati agli intervalli
  $$I_n = [a_n, b_n]$$
  dove
  $$a_n = \inf C_n\,, \qquad b_n = \sup C_n\,.$$
  Si dimostra che $x_n \to p$ dove $p \in \mathbb{R}$ è tale che $\bigcap_n I_n = \{p\}$.

- **Corollario.** *Per ogni $d \in \mathbb{N}$, lo spazio metrico $\mathbb{R}^d$ è completo.*
  Idea: se $\{\underline{x}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ è di Cauchy, allora essa è "di Cauchy per coordinate". Secondo il teorema precedente, $\{\underline{x}_n\}$ converge per coordinate; e ciò significa che converge in $\mathbb{R}^d$.

- Chiameremo *rettangolo chiuso in* $\mathbb{R}^d$ ogni insieme del tipo
  $$F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_d, b_d]$$
  dove $a_k \leq b_k$ per ogni $k = 1, \ldots, d$.

  Dal Principio di intervalli chiusi inscatolati si deduce facilmente la seguente proprietà degli spazi euclidei.

- *Corollario (principio di rettangoli chiusi inscatolati in $\mathbb{R}^d$).*
  Consideriamo una successione di rettangoli chiusi in $\mathbb{R}^d$
  $$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots\,.$$
  (a) L'intersezione $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ non è vuota.
  (b) Se $\operatorname{diam} F_n \to 0$, allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{\underline{p}\}$.

- *Teorema.* In uno spazio metrico X, un punto $p \in X$ è un punto di accumulazione di un insieme A se e solo se esiste una successione in $A \setminus \{p\}$ convergente (in X) a p.

- **Teorema.** Sia A un insieme non vuoto in uno spazio metrico X. Allora le seguenti sono equivalenti:
  (i) A è chiuso;
  (ii) se $A \ni x_n \to p \in X$ allora $p \in A$.

- **Esercizio per voi.** Siano (X, d) uno spazio metrico, e $A \subset X$.
  - Se (A, d) è completo allora A è chiuso in X.
  - Se (X, d) è completo e A è chiuso allora (A, d) è completo.

19/11/2014 [2 ore: 30,31]

- Nel *Principio di intervalli chiusi inscatolati*, sia l'ipotesi che gli intervalli sono chiusi sia quella che gli intervalli sono limitati sono entrambe necessarie.

Sottosuccessioni e classe limite in $\mathbb{R}$

- *Ripasso:* (a) definizione di sottosuccessione di una successione;
  (b) $x_n \to p$ se e solo se ogni sottosuccessione di $\{x_n\}$ tende a p.

- **Teorema.**
  (a) *[Heine–Borel]* In $\mathbb{R}$, ogni successione limitata ammete una sottosuccessione convergente.
  (b) In $\mathbb{R}$, ogni successione illimitata [superiormente/inferiormente] ammete una sottosuccessione divergente [a $+\infty\,/-\infty$].

  Dimostrazione. (a) Supponiamo che $\{x_n\} \subset [a, b]$. Dividiamo $[a, b]$ in due "metà" della stessa lunghezza; almeno una di esse, che denotiamo con $[a_1, b_1]$, contiene x_n per infiniti n. Poi, dividiamo $[a_1, b_1]$ in due "metà" della stessa lunghezza; almeno una di esse, che denotiamo con $[a_2, b_2]$, contiene x_n per infiniti n. E così via. Otteniamo una successione di intervalli inscatolati

  $$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots .$$

Osserviamo che, per ogni k, l'intervallo $[a_k, b_k]$ contiene x_n per infiniti n, inoltre $b_k - a_k = 2^{-k}(b-a) \to 0$. Per il *Principio di intervalli chiusi inscatolati*,

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k] = \{p\}\,, \quad a_k \to p\,, \quad b_k \to p\,.$$

Possiamo scegliere (in $\mathbb{N}$) indici $n_1 < n_2 < \cdots$ in modo che $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ per ogni k. Per il teorema "dei due carabinieri", $x_{n_k} \to p$ per $k \to +\infty$.

(b) Se, ad esempio, $\{x_n\}$ è illimitata superiormente, Possiamo scegliere (in $\mathbb{N}$) $n_1 < n_2 < \cdots$ in modo che $x_{n_k} > k$ per ogni k. Allora $x_{n_k} \to +\infty$. *[q.e.d.]*

- Definizione di *classe limite* di $\{x_n\}$. Notazione: $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\{x_n\})$.
  I suoi elementi si chiamano *valori limite.*

- *Esempi:* $x_n = (-1)^n$; $x_n = \sin\frac{n\pi}{2} - 2^{-n}$; $x_n = e^{(-1)^n n}$.

- **Teorema (proprietà di classe limite).**
  Siano $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\{x_n\})$.
  (i) $\mathcal{E}$ è un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$.
  (ii) $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$.
  (iii) Esistono (in $\overline{\mathbb{R}}$):

  $$\max \mathcal{E}\,, \quad \min \mathcal{E}$$

  e vengono chiamati *limite superiore* (o *massimo limite*) e *limite inferiore* (o *minimo limite*) di $\{x_n\}$, e denotati rispettivamente con

  $$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to+\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n\,.$$

  (iv) Valgono le seguenti formule:

  $$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right)\,,$$
  $$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right)$$

  (i limiti si intendono in $\overline{\mathbb{R}}$).

- *Esempi.*
  - Una successione con $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, +\infty\}$.
  - Una successione con $\mathcal{E} = \mathbb{N}$ – non esiste!

- ◦ Una successione con $\mathcal{E} = \mathbb{N} \cup \{\pm\infty\}$.
- ◦ Una successione con $\mathcal{E} = \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$ – non esiste!
- ◦ Una successione con $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{R}}$
  (idea: ordinare $\mathbb{Q}$ in una successione $\{q_n\}$ *[perché è possibile?]*, definire $\{x_n\} = \{q_1, q_1, q_2, q_1, q_2, q_3, q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots\}$, osservare che $\mathcal{E}$ contiene $\mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$, infine usare la proprietà che che $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}$ è un insieme chiuso).

- *Una curiosità.*
  Per $x_n = \sin n$, $y_n = \cos n$ si ha $\mathcal{E}(\{x_n\}) = \mathcal{E}(\{y_n\}) = [-1, 1]$.

- **Esercizi per voi.** Siano $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, $a, p \in \overline{\mathbb{R}}$.
  (i) Se $\overline{\lim}\, x_n < a$ allora $x_n < a$ definitivamente.
  Dall'altra parte, se $\overline{\lim}\, x_n > a$ non è detto che si abbia $x_n > a$ definitivamente.
  (Formulate affermazioni analoghe per $\underline{\lim}\, x_n$.)
  (ii) $\{x_n\}$ è limitata se e solo se $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$.
  (iii) $\mathcal{E} = \{p\}$ se e solo se $x_n \to p$.

- *Commenti su alcuni esercizi del I compitino.*

24/11/2014 [2 ore: 32,33]

Serie di numeri reali (serie numeriche)

- Data una successione $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, la *serie*
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$
  può essere vista come un tentativo di calcolare la somma di infiniti termini
  $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots .$$
  Definizione formale: la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è definita come la successione $\{A_k\}$ delle sue *somme parziali* (o *ridotte*), dove $A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Il *comportamento* della serie è poi definito come il comportamento della successione $\{A_k\}$.

- *Esempi.* $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ diverge alla somma $+\infty$.
  Una *serie geometrica* $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge se e solo se $|q| < 1$; in tal caso la somma della serie vale $\frac{1}{1-q}$.

- *Esempi.*
  (i) $\sum_1^{+\infty}(-1)^n$ è irregolare.
  (ii) La *serie di Mengoli* $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.
  (iii) Vedremo più avanti che:
  $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n}$ (la *serie armonica*) diverge, mentre $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

- *Osservazioni.*
  (i) Per ogni costante $c \neq 0$, le serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ e $\sum_1^{+\infty}(c \cdot a_n)$ hanno lo stesso comportamento.
  (ii) Per ogni $s \in \mathbb{Z}$, le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=s}^{+\infty} a_n$ hanno lo stesso comportamento.
  Corollario. Se $a_n = b_n$ definitivamente, allora le serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ e $\sum_1^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento.

- **Teorema (condizione necessaria).** Il termine generale di una serie convergente tende necessariamente a 0.

- *Esempio.* La serie $\sum_1^{+\infty} n^2(3^{1/n} - 1)\log(\frac{n+1}{n})$ non converge.

- *Criterio di Cauchy per le serie.*

- Convergenza assoluta.
  Teorema (cond. sufficiente). Se una serie converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.

- *Corollario.* Per una serie $\sum_1^{+\infty} a_n$, valgono le seguenti implicazioni:
  $$\sum_1^{+\infty} |a_n| \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_1^{+\infty} a_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0\,,$$
  ma le implicazioni inverse sono false (v. la serie $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ e quella armonica).

Serie a termini non negativi

- Consideriamo una serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni n (o almeno definitivamente).
  Grazie alla monotonia della successione delle somme parziali, tale serie non può essere irregolare e le seguenti sono equivalenti:
  (i) $\sum_1^{+\infty} a_n$ converge;
  (ii) $\sum_1^{+\infty} a_n$ non diverge;
  (iii) la successione delle somme parziali della $\sum_1^{+\infty} a_n$ è superiormente limitata.

- **TEOREMA.** Supponiamo che $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0, +\infty)$.

1. *(criterio del confronto).* Sia $a_n \le b_n$ almeno definitivamente. Se $\sum_1^{+\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_1^{+\infty} a_n$ converge.
(E quindi, se $\sum_1^{+\infty} a_n$ diverge allora $\sum_1^{+\infty} b_n$ diverge.)

2. *(confronto asintotico).* Sia $a_n \sim b_n$ (per $n \to +\infty$). Allora le due serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ e $\sum_1^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento.

- *Esempi.* Le serie $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ e $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ convergono.

26/11/2014 [2 ore: 34,35]

- **Teorema (criteri della radice e del rapporto).** Sia $a_n \ge 0$ per ogni n (o almeno definitivamente). Supponiamo che esista

  $$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} =: \ell \quad \text{oppure} \quad \lim \sqrt[n]{a_n} =: \ell \quad (0 \le \ell \le +\infty).$$

  (i) Se $\ell < 1$ allora la serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ converge.
  (ii) Se $\ell > 1$ allora $a_n \to +\infty$ e quindi la serie diverge.
  (Sul caso $\ell = 1$ il criterio non dice niente.)

- *Esempi.* $\sum_1^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_4^{+\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

- **Teorema (criterio di condensazione).** Sia $a_n \ge a_{n+1} \ge 0$ per ogni n (o almeno definitivamente). Allora le due serie

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$$

  hanno lo stesso comportamento.

- **Esempi importanti:**
  - $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ converge se e solo se $a > 1$ [fatto];
  - $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a \log^b n}$ converge se e solo se $a > 1, b \in \mathbb{R}$ oppure $a = 1, b > 1$ [sarà fatto a esercitazione].

- **Teorema (criterio di Leibniz).** Consideriamo la serie a termini di segno alterno

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n \tag{3}$$

  con $b_n \ge 0$ per ogni n (o almeno definitivamente). Se $b_n \searrow 0$ (cioè, $b_n \ge b_{n+1}$ per ogni n, e $b_n \to 0$) allora la serie (3) converge.

- *Esempio.* $\sum_1^{+\infty} \frac{2n}{n^2+1}(a^2-1)^n$.

- *La serie somma.* Consideriamo le seguenti tre serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)\,.$$
Se la prima e la seconda sono regolari con somme, rispettivamente, $A, B \in \overline{R}$ ed esiste $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$, allora la terza serie è regolare con la somma uguale a $A + B$.
In altre parole, $\sum_1^{+\infty}(a_n+b_n) = (\sum_1^{+\infty} a_n)+(\sum_1^{+\infty} b_n)$ se l'espressione a destra ha senso.

  <u>*Esercizio per voi.*</u> Se la prima delle tre serie converge, allora la seconda e la terza serie hanno lo stesso comportamento.

01/12/2014 [2 ore: 36,37]

- **Riordinamenti di serie numeriche** – *un "complemento culturale".*
Una *permutazione* (o riordinamento) *di* $\mathbb{N}$ è una qualsiasi funzione biunivoca $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

  <u>*Esercizio per voi.*</u>
"Se $x_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ allora ogni riordinamento $\{x_{\pi(n)}\}$ (dove π è una permutazione di $\mathbb{N}$) tende a ℓ." Vero o falso?

  Esempio. Consideriamo la serie irregolare $\sum_1^{+\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-1+\dots$. Il suo riordinamento $1+1-1+1+1-1+1+1-1+\dots$ diverge alla somma $+\infty$. (Inoltre, la serie non ammette riordinamenti convergenti *[perché?]*.)

  Teorema 1. Se $\sum_1^{+\infty} a_n$ converge assolutamente allora ogni suo riordinamento converge alla stessa somma.

  Teorema 2 (Riemann). Supponiamo che $\sum_1^{+\infty} a_n$ converga semplicemente ma non assolutamente. Allora per ogni $s \in \overline{\mathbb{R}}$ la serie ammette un riordinamento regolare con somma s. Inoltre, la serie ammette riordinamenti irregolari.

Limiti di funzioni

- *Idea base per la definizione di* $\lim_{x\to p} f(x) = \ell$ *:*
  $\forall V$ intorno di ℓ si ha che "$f(x) \in V$ definitivamente per $x \to p$ ",
  dove l'espressione virgolettata significa:
  $\exists U$ intorno di p tale che per ogni $x \in U \setminus \{p\}$ si abbia $f(x) \in V$.

- **Definizione.** Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $E \subset X_1$, $f\colon E \to X_2$, $p \in E'$, $\ell \in X_2$. Diciamo che
  $$\lim_{x\to p} f(x) = \ell$$
  se
  $$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\, \forall x \in \big(B(p,\delta) \setminus \{p\}\big) \cap E\ :\quad f(x) \in B(\ell,\varepsilon)\,,$$
  ovvero
  $$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\, \forall x \in E \text{ con } 0 < d_1(x,p) < \delta\colon\ d_2(f(x),\ell) < \varepsilon\,.$$

- **Teorema (caratterizzazione successionale).** Siano, come sopra, $f\colon X_1 \supset E \to X_2$, $p \in E'$, $\ell \in X_2$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (i) $\lim_{x\to p} f(x) = \ell$;
  (ii) per ogni successione $\{x_n\} \subset E \setminus \{p\}$ tale che $x_n \to p$ si ha che $f(x_n) \to \ell$.

- *Esempi.*
  (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
  (ii) $\log x \sim x - 1$ per $x \to 1$.
  (iii) $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$, mentre $x = o(x^2)$ per $x \to -\infty$.
  (iv) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ non esiste, mentre i due limiti unilaterali $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x}$ esistono e valgono $\pm\infty$.

- *Ulteriori varianti della definizione di limite.*
  - Definizione di $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$ dove $f\colon \mathbb{R} \supset E \to X$, $\inf E = -\infty$, $\ell \in X$.
  - Definizione di $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ dove $f\colon X \supset E \to \mathbb{R}$, $p \in E'$.
  - Definizione di $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2$ dove $f\colon \mathbb{R} \supset E \to \mathbb{R}$, $-1 \in (E \cap [-1,+\infty))'$.
  - Altri varianti, con esempi.

03/12/2014 [2 ore: 38,39]

- **Proprietà di limiti di funzioni.** Siano (X, d) uno spazio metrico, $f\colon X \supset E \to \mathbb{R}$, $p \in E'$. Per semplicità di scrittura useremo la seguente notazione:

$$B^\bullet_E(p,r) = \big(B(p,r) \setminus \{p\}\big) \cap E \qquad (r > 0).$$

  (a) *(Locale limitatezza).* Se $\lim_{x\to p} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ allora f è limitata in qualche $B^\bullet_E(p,r)$.
  [Infatti, per la definizione di limite esiste $r > 0$ tale che $f(x) \in (\ell - 1, \ell + 1)$ in $B^\bullet_E(p,r)$.]

  (b) *(Permanenza del segno).* Supponiamo che $\lim_{x\to p} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \in \overline{R}$.
  (b1) Se $\ell > \alpha$ allora $f(x) > \alpha$ in qualche $B^\bullet_E(p,r)$.
  (b2) Se $f(x) \geq \alpha$ in qualche $B^\bullet_E(p,r)$ allora $\ell \geq \alpha$.
  [*Dimostrazione – ESERCIZIO PER VOI!*]

  (c) *(Teorema del confronto ["dei 3 carabinieri"])* – segue dalla caratterizzazione succesionale.

  (d) *(Operazioni algebriche e limiti)* – idem.

  (e) *(Limiti e le funzioni elementari)* – idem.

  (f) *(Limiti notevoli)* – idem.

- **Asintoti.**
La retta (verticale) $x = x_0$ è un *asintoto verticale* al grafico di f se vale almeno una delle seguenti:

$$\lim_{x\to x_0^+} |f(x)| = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to x_0^-} |f(x)| = +\infty\,.$$

Dati $m, q \in \mathbb{R}$, la retta (non verticale) di equazione $y = mx + q$ è un *asintoto* (*verticale* se $m = 0$, *obliquo* altrimenti) al grafico di f per $x \to +\infty$ [per $x \to -\infty$] se

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - mx - q\big) = 0 \quad \big[\lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - mx - q\big) = 0\big]\,.$$

Teorema (calcolo di asintoti non verticali).
Dati $m, q \in \mathbb{R}$, le seguenti due affermazioni sono equivalenti:
(i) $y = mx + q$ è un asintoto al grafico di f per $x \to +\infty$;
(ii) $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - mx\big)$.

- <u>**Insiemi compatti in spazi metrici**</u> – *si veda il relativo file di appunti sulla mia pagina web.*
(Commento: per motivi di semplicità abbiamo voluto definire la compattezza in modo diverso, ma equivalente, rispetto al libro di Soardi.)

10/12/2014 [2 ore: 40,41]

Continuità

- In quanto segue, (X_i, d_i) sono spazi metrici, $E \subset X_1$ è un insieme, $f\colon E \to X_2$, $p \in E$.

- Definizione di continuità di f nel punto p.

- *Osservazioni.*
  (i) Se p è un punto isolato di E allora f è automaticamente continua in p.
  (ii) Supponiamo invece che $p \in E'$. Allora le seguenti sono equivalenti:
    (a) f è continua in p;
    (b) $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$;
    (c) se $E \ni x_n \to p$ allora $f(x_n) \to f(p)$.
  (iii) Siccome la (c) vale sempre se $p \notin E'$ *[perché?]*, l'equivalenza $(a) \Leftrightarrow (c)$ è vera per ogni $p \in E$ (che sia isolato o meno).
  (iv) Osserviamo che il teorema su "limiti e funzioni elementari" in realtà dice che *ogni funzione elementare è continua in ogni punto del suo insieme di definizione.*

- *Esercizio importante.* Supponiamo che $f\colon X_1 \supset E \to X_2$, $g\colon X_2 \supset D \to X_3$, $f(E) \subset D$. Se f è continua in un punto $p \in E$ e g è continua nel punto $f(p)$, allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in p.

- *Definizione (continuità globale).* $f\colon E \subset X_1 \to X_2$ è continua (in E, oppure su E) se f è continua in ogni punto di E.

- **Teorema (caratterizzazioni di continuità).** Per una funzione $f\colon X_1 \to X_2$, le seguenti sono equivalenti:
  (i) f è continua;
  (ii) la controimmagine $f^{-1}(A)$ di ogni aperto $A \subset X_2$ è un insieme aperto;
  (iii) la controimmagine $f^{-1}(C)$ di ogni chiuso $C \subset X_2$ è un insieme chiuso.

- **Teorema (Weierstrass).** Se $f\colon X_1 \supset C \to X_2$ è continua e C è compatto, allora l'insieme immaggine $f(C)$ è compatto.

  Idea della dimostrazione. Sia $\{y_n\} \subset f(C)$. Esiste $\{x_n\} \subset C$ tale che $f(x_n) = y_n$ per ogni n. Esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a qualche $p \in C$. Allora $y_{n_k} \to f(p)$. *[q.e.d.]*

- **Corollario (Teorema di Weierstrass).** Siano (X, d) uno spazio metrico compatto (non vuoto) e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono $\max f(X)$ e $\min f(X)$. In particolare, f è limitata.

  Dimostrazione. Siccome l'insieme $D := f(X)$ è compatto (e quindi chiuso e limitato), basta dimostrare che *ogni insieme chiuso e limitato* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ ha massimo e minimo. Per dimostrare l'esistenza del massimo, consideriamo $s := \sup D$ (che è un numero reale!).

  Se $s \in D'$ allora $s \in D$ (essendo D chiuso) e quindi $s = \max D$.

  Sia invece $s \notin D'$. Supponiamo che $s \notin D$. Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \cap D = \emptyset$. Quindi $D \subset (-\infty, s) \setminus (s-\varepsilon, s+\varepsilon) = (-\infty, s-\varepsilon]$, ma ciò contraddice la definizione di s. Ne segue che, anche in questo caso, $s = \max D$. *[q.e.d.]*

- <u>*Esempio.*</u> Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che entrambi i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ esistano e valgano $+\infty$. Allora f assume il suo minimo.

  (*Idea della dim..* Denotiamo $i := \inf f(\mathbb{R})$ $(< +\infty)$ e fissiamo un $m \in \mathbb{R}$ tale che $m > i$. Esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tali che $f(x) > m$ in $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. Ne segue facilmente che $i = \inf f([a, b]) = \max f([a, b])$ [l'ultima uguaglianza viene dal teorema di Weierstrass], e quindi $i = f(x)$ per qualche $x \in [a, b]$.)

- **Teorema (degli zeri).** Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $p \in (a, b)$ tale che $f(p) = 0$.
  [Da dimostrare la prossima volta.]

- **Teorema (dei valori intermedi, di Darboux).** Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \neq f(b)$. Allora f assume in (a, b) tutti i valori strettamente compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

  Idea della dimostrazione. Se v è un numero reale strettamente compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, applicare il teorema precedente alla funzione $g(x) = f(x) - v$. *[q.e.d.]*

- **Corollario importante (teorema di Darboux).** Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo non vuoto (di qualsiasi tipo). Se $f\colon I \to \mathbb{R}$ è continua, allora $f(I)$ è un intervallo.

Idea della dimostrazione. Denotiamo $J = f(I)$. Per ogni $y_1, y_2 \in J$ con $y_1 < y_2$, esistono $x_1, x_2 \in I$ tali che $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Per il *Teorema dei valori intermedi*, f assume nei punti compresi tra x_1, x_2 (tutti appartenenti ad I) tutti i valori dell'intervallo (y_1, y_2). Di conseguenza, $[y_1, y_2] \subset J$. Dall'arbitrarietà di y_1, y_2 segue che J è un intervallo. *[q.e.d.]*

15/12/2014 [2 ore: 42,43]

- *Dimostrazione del teorema degli zeri.*
  Supponiamo, ad es., che $f(a) < 0 < f(b)$. Applicheremo il metodo di bisezione. Consideriamo il punto medio di $[a, b]$. Se f vi si annulla, abbiamo finito. Se no, denotiamo con $[a_1, b_1]$ quella delle due metà di $[a, b]$ per cui $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Ripetiamo lo stesso con l'intervallo $[a_1, b_1]$, ottenendo $[a_2, b_2]$ come quella delle due metà di $[a_1, b_1]$ con valori di f agli estremi di segno discorde. E così via. Se a nessun passo il punto medio è uno zero per f, otteniamo così una successione di intervalli inscatolati

  $$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

  le cui lunghezze tendono a 0. Per il *Principio di intervalli chiusi inscatolati*,

  $$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k] = \{p\}\,, \quad a_k \to p\,, \quad b_k \to p\,.$$

  Allora $0 > f(a_k) \to f(p)$, $0 < f(a_k) \to f(p)$ (continuità!). Siccome $f(p) \le 0$, $f(p) \ge 0$ (permanenza di segno!), si ha $f(p) = 0$. *[q.e.d.]*

- *Corollario.* Se $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora $f([a, b]) = [m, M]$ con opportuni $-\infty < m \le M < +\infty$.

- *Corollario.* Supponiamo che (a, b) sia un qualsiasi intervallo aperto non vuoto ed $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua tale che i due limiti

  $$\lim_{x \to a^+} f(x)\ , \qquad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

  siano infiniti di segno opposto. Allora f è suriettiva.

- *Classificazione delle discontinuità.* Supponiamo che f sia una funzione (a valori reali) definita almeno in un "intorno bucato" di un punto x_0 : $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$. Per semplicità denotiamo

$$L_{\pm}(x_0) := \lim_{x \to (x_0)\pm} f(x) .$$

Possono verificarsi i seguenti 4 casi:

(a) $L_{\pm}(x_0)$ esistono ed entrambi sono uguali a $f(x_0)$; in questo caso x_0 è un punto di continuità.

(b) $L_{\pm}(x_0)$ esistono finiti, sono uguali tra loro ma diversi da $f(x_0)$ (che include anche il caso in cui f non è definita in x_0); in questo caso x_0 è un punto di *discontinuità eliminabile.*

(c) $L_{\pm}(x_0)$ esistono finiti ma sono diversi tra loro; in questo caso x_0 è un punto di *discontinuità di I specie* ("salto finito").

(d) In tutti gli altri casi (cioè quando almeno uno dei due limiti è infinito o non esiste), x_0 è un punto di *discontinuità di II specie.*

- Esempi di vari tipi di discontinuità: $|\mathrm{sgn}(x)|$, $\frac{\sin x}{x}$, $\mathrm{sgn}(x)$, $\arctan \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}$, $e^{1/x}$, $\sin \frac{1}{x}$.

- La *funzione di Dirichlet*,

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

presenta in tutti i punti una discontinuità di II specie.

- **Esercizio per voi.** Classificare le discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| > 1 \text{ oppure } x = \frac{1}{n} \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- *Definizione di vari tipi di monotonia di f su un intervallo*: non decrescente (o crescente in senso lato), strettamente crescente, non crescente (o decrescente in senso lato), strettamente decrescente.

- **Teorema.** Siano (a, b) un qualsiasi intervallo aperto non vuoto e $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona non decrescente. Allora

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x) , \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x) .$$

- **Teorema.** Siano (a, b) un qualsiasi intervallo aperto non vuoto e $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Denotiamo
$$D_f = \{x \in (a, b) : f \text{ non è continua in } x\}.$$
  (i) Ogni $x \in D_f$ è un punto di discontinuità di I specie.
  (ii) L'insieme D_f è al più numerabile.
  (iii) L'insieme $(a, b) \setminus D_f$ (cioè, l'insieme dei punti di continuità di f) è denso in (a, b), cioè, tra ogni due elementi di (a, b) vi sono infiniti punti di continuità di f.

18/12/2014 [2 ore: 44,45]

- *Teorema (continuità dell'inversa).* Sia f una funzione continua in un intervallo I, e denotiamo $J = f(I)$.
  (i) f è iniettiva se e solo se f è strettamente monotona.
  (ii) Se f è strettamente monotona allora $f^{-1} : J \to I$ è continua.

Calcolo differenziale

- Motivazione: geometrica (retta tangente), fisica (velocità).

- Definizione di:
  - rapporto incrementale,
  - funzione derivabile in un punto x_0,
  - derivata in x_0,
  - retta tangente,
  - derivabilità da destra [sinistra], derivata destra [sinistra],
  - derivabilità in (a, b),
  - derivabilità in $[a, b]$.

- *Lemma.* Per $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ e $d \in \mathbb{R}$, le seguenti sono equivalenti:
  (a) f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = d$;
  (a') $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = d$;
  (b) $f(x_0 + h) = f(x_0) + dh + o(h)$ per $h \to 0$;
  (b') $f(x) = f(x_0) + d(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to 0$.

- Continuità in x_0 come *condizione necessaria* per la derivabilità in x_0.

- Continuità non implica la derivabilità – esempi.

- Derivata di multiplo, somma, prodotto, rapporto.
- Derivata di funzioni composte.

07/01/2015 [2 ore: 46,47]

- *Teorema (derivabilità delle funzioni elementari).* Se $f\colon D \to \mathbb{R}$ è una delle funzioni elementari diversa da una potenza, allora f è derivabile in ogni punto di D°. Se invece f è una delle funzioni potenza (cioè, $f(x) = x^\alpha$), allora f è derivabile almeno in ogni punto di $D^\circ \setminus \{0\}$.
- *Esempio.* La derivabilità e la derivata di $f(x) = \cos x$.
- **Teorema (derivabilità dell'inversa).** Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0)$, $J := f(I)$. Supponiamo che f sia continua e strettamente monotona e che sia derivabile nel punto x_0 con $f'(x_0) \neq 0$. Allora J è un intervallo e la funzione inversa $f^{-1}\colon J \to I$ è derivabile in y_0 con
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,,$$
in altre parole, $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\,.$
- *Esempio.* La derivata di $f(x) = \arctan x$.
- Alcuni tipi di non derivabilità: punto angoloso, punto a tangente verticale, cuspide.
- Definizione di *estremanti*: massimo/minimo assoluto (o globale), massimo/minimo relativo (o locale). Esempi.
- **Teorema (Fermat, condizione necessaria).** Se $f\colon I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, presenta un estremo relativo in un punto $x_0 \in I^\circ$ in cui f è derivabile, allora $f'(x_0) = 0$.
- *Corollario.* I punti sospetti di essere estremanti di $f\colon I \to \mathbb{R}$ sono:
  (i) i punti di derivabilità in I° con derivata nulla (detti *punti stazionari*);
  (ii) i punti di non derivabilità in I°;
  (iii) i punti di ∂I appartenenti ad I.

- Per brevità di scrittura, diremo che $f\colon I \to \mathbb{R}$ (dove I è un intervallo non degenere) *soddisfa (H)* se f è continua in I e derivabile in I°.

- Teoremi di **Rolle** e di **Lagrange** (dimostrati). Teorema di **Cauchy** (non dimostrato).

- **Teorema (derivata e monotonia).** Siano I un intervallo non degenere e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfi (H).
  (i) $f' \geq 0$ in $I^\circ \;\Leftrightarrow\; f$ è non decrescente in I.
  (ii) $f' > 0$ in $I^\circ \;\Rightarrow\; (\not\Leftarrow)\; f$ è strettamente crescente in I.
  (iii) $f' = 0$ in $I^\circ \;\Leftrightarrow\; f$ è costante in I.

- *Teorema (caratterizzazione di stretta monotonia)* [non dimostrato]. Sotto l'ipotesi (H), f è strettamente crescente in I se e solo se: $f' \geq 0$ in I° e l'insieme $\{x \in I^\circ : f'(x) = 0\}$ non ha punti interni (cioè, non contiene alcun intervallo non degenere).

08/01/2015 [2 ore: 48,49]

<u>*ESERCITAZIONE*</u>

1. Derivare le funzioni $f(x) = \sin(\log(x^3))$, $g(x) = \sin^3(\log x)$.
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di

$$h(x) = (\sin x)^{1+\cos x}$$

nel punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$.

2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare il numero delle soluzioni dell'equazione

$$x = a \log x\,.$$

3. Confrontare le funzioni $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

4. Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x} & \text{per } x > 0, \\ \alpha \sin x + \beta \cos x & \text{per } x \leq 0; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{per } x \neq 0, \\ c & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

5. Dimostrare che $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

6. Dimostrare che, per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ e ogni $a \in (0, 1)$,

$$(\cos x)^a < \cos(ax)\,.$$

(Non risolto per mancanza di tempo.
Suggerimento: considerare $f(x) = \cos(ax) - (\cos x)^a$, osservare che $f(0) = 0$ e studiare la monotonia di f in $[0, \frac{\pi}{2})$.)

12/01/2015 [2 ore: 50,51]

- *Teorema (derivata come limite di derivate).* Supponiamo che f soddisfi la condizione (H) in $[a, b)$ e che esista (finito o infinito) il limite
$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \ell\,.$$
Allora $f'_+(a) = \ell$.

- *Corollario.* Sia f una funzione derivabile in un intervallo aperto I. Allora ogni punto di discontinuità di f' è di II specie.

- *Curiosità.* E' noto che, sotto le ipotesi del Corollario, f' *ha la proprietà di Darboux:* per ogni intervallo $J \subset I$ l'insieme immagine $f'(J)$ è un intervallo.

- *Esempio 1.* La funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ non è derivata di alcuna funzione derivabile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- *Esempio 2.* La funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$
è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, ma f' non è continua in 0.

- La regola di de l'Hopital. Commenti sull'uso.
Esempio: per $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ e $g(x) = \sin x$, il limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, mentre il limite $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste; quindi, se con de l'Hopital otteniamo un limite che non esiste, non possiamo concludere che non esista il limite iniziale!

Derivate successive, sviluppi di Taylor

- Definizione di:
(a) f è n volte derivabile in I;
(b) f è n volte derivabile in x_0.

- *Definizione.* Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ e $n \in \mathbb{N}$. Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0, consideriamo il polinomio
$$P_{n,f}(x) = P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \,.$$
Esso viene detto *polinomio di Taylor di "grado n"* (in realtà, $\leq n$) *di f, centrato in x_0.*

- *Proprietà di P_n.*
  (a) $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$.
  (b) P_n è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che soddisfi (a).
  (c) $(P_{n,f})' = P_{n-1,f'}$.

- *Terminologia.* Bisogna distinguere tra *polinomio* di Taylor (definito sopra) e *sviluppo* di Taylor. Quest'ultimo è un uguaglianza tipo
$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$
dove $r_n(x)$ è il "resto", cioè l'errore che si commette sostituendo f con P_n.
Gli sviluppi di Taylor centrati in $x_0 = 0$ vengono chiamati *sviluppi di McLaurin.*

- **Teorema (sviluppo di Taylor, resto di Peano).** Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in x_0. Allora
$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \qquad \text{per } x \to x_0.$$
Inoltre, P_n è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che soddisfi tale formula.

- *Esempio.* Scrivendo lo sviluppo di $f(x) = e^x$ nel punto $x_0 = 0$, otteniamo che, per $x \to 0$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
Analogamente si ottengono gli sviluppi di altre funzioni elementari (v. gli sviluppi notevoli), che abbiamo utilizzato per il calcolo di limiti.

- *Esempio.* Calcolare $f^{(20)}(0)$ per la funzione $f(x) = \cos(x^3)\cdot\log(1-x^4)$.
[Qui si usa l'unicità dello sviluppo!]

14/01/2015 [2 ore: 52,53]

- *Convenzione.* Se $x < x_0$, allora con (x_0, x) e $[x_0, x]$ intendiamo rispettivamente (x, x_0) e $[x, x_0]$.

- **Teorema (sviluppo di Taylor, resto secondo Lagrange).** Siano I un intervallo non degenere, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Sia $x \in I \setminus \{x_0\}$ un punto fissato. Supponiamo che f sia:
  (a) n volte derivabile in $[x_0, x]$,
  (b) $n+1$ volte derivabile in (x_0, x).
  Allora esiste un punto $z \in (x_0, x)$ tale che
$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

- *Applicazione 1.* Il numero e è irrazionale.

- *Applicazione 2.* Per ogni $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \,.$$
  Allo stesso modo si verificano le seguenti formule validi per ogni $x \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x \,,$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x \,,$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathrm{Sh}(x) \,,$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{Ch}(x) \,.$$

- **Esercizio*.** Dimostrare che, per ogni $x \in (-1, 1]$,
$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \,.$$
  (In particolare, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\log 2 \,.$)

Convessità

- *Notazione.* Data una funzione f definita almeno in due punti $x_1 < x_2$, denotiamo con h_{x_1,x_2} la funzione che descrive la retta secante passante per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, cioè,
$$h_{x_1,x_2}(x) = f(x_1) + \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1).$$

- **Definizione.** Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ (dove I è un intervallo non degenere), diciamo che, nell'intervallo I, f è:
  - *convessa* $\equiv \forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2\colon\ f \leq h_{x_1,x_2}$ in (x_1, x_2);
  - *strett. convessa* $\equiv \forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2\colon\ f < h_{x_1,x_2}$ in (x_1, x_2);
  - *concava* $\equiv \forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2\colon\ f \geq h_{x_1,x_2}$ in (x_1, x_2);
  - *strett. concava* $\equiv \forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2\colon\ f > h_{x_1,x_2}$ in (x_1, x_2).

  Si noti che f è concava se e solo se $-f$ è convessa.

- *A proposito della terminologia.* Le funzioni convesse sono quindi le funzioni "concave verso l'alto", mentre le funzioni concave sono quelle "concave verso il basso".

- Esempi.

- **Teorema (criteri di convessità.)** Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
  1. Supponiamo che f sia derivabile in I°.
    (a) f è convessa in $I \Leftrightarrow f'$ è monotona non decrescente in I° $\Leftrightarrow \forall x_0 \in I^\circ$: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ in I.
    (b) f è strett. convessa in $I \Leftrightarrow f'$ è strett. crescente in I°.
  2. Supponiamo che f sia 2 volte derivabile in I°.
    (a) f è convessa in $I \Leftrightarrow f'' \geq 0$ in I°.
    (b) $f'' > 0$ in $I^\circ \Rightarrow f$ è strett. convessa in I (ma non vale il vice versa).

- *Commento.* L'ultima condizione in 1.(a) dice che, per ogni $x_0 \in I^\circ$, il grafico di f sta al di sopra (in senso lato) della retta tangente nel punto di ascissa x_0.

- **Punti di flesso.** Dati $f\colon I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I^\circ$, diciamo che x_0 è un *punto di flesso* per f se esiste la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0 e, in un opportuno intorno di x_0, "il grafico di f passa nel punto di ascissa x_0 da un lato della retta tangente all'altro";
  più precisamente:
  se esiste $\delta > 0$ tale che, denotando con τ_{x_0} la funzione che descrive la retta tangente, $f > \tau_{x_0}$ in uno dei due intervalli $(x_0 - \delta, x_0)$ e $(x_0, x_0 + \delta)$, mentre $f < \tau_{x_0}$ nell'altro.

- Ogni punto in cui "cambia la convessità di f" è un punto di flesso.

- *Tipi di flessi.* Ci sono tre tipi di flesso.
  (i) *Flesso a tangente orizzontale* se $f'(x_0) = 0$ e, in un intorno di x_0, f ha segni opposti nei due "semi-intorni".
  Esempio: $f(x) = x^3$ in 0.
  (ii) *Flesso a tangente obliqua* se $f'(x_0) \neq 0$ e:
  $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ in un semi-intorno di x_0, mentre $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ nel semi-intorno opposto.
  Esempio: $f(x) = \sin x$ in 0.
  (iii) *Flesso a tangente verticale* se $f'(x_0) = \pm\infty$.
  Esempio: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in 0.

- **Condizione sufficiente per estremante.**
  Siano $f \colon I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I^\circ$. Sappiamo già che una condizione necessaria affinché x_0 sia un estremante per f è che $f'(x_0) = 0$ (cioè, che x_0 sia un punto stazionario per f).

  Supponiamo ora che, per qualche $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, si abbia:
  $$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$
  Allora:
  - *se n è dispari allora x_0 è un punto di flesso (in particolare, non è estremante per f);*
  - *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo (stretto);*
  - *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo (stretto).*

  (Dimostrazione. Applicando la formula di Taylor con resto di Peano, otteniamo che, per $x \to x_0$,
  $f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.
  Quindi, l'incremento $f(x) - f(x_0)$ e la funzione $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ hanno lo stesso segno in un opportuno intorno di x_0.)

- *Esempio.* Al variare di $a \in \mathbb{R}$, stabilire se 0 è estremante (e di che tipo) della funzione
  $$f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + ax^2.$$

- *Commento su parità/disparità.*
  E' *molto utile* sapere che, *nello sviluppo di McLaurin di una funzione pari o dispari, compaiono solo potenze, rispettivamente, pari o dispari* (nel senso che i coefficienti delle altre potenze sono nulli).

Giustificazione (non fatta in aula per mancanza di tempo).
Se f è pari, cioè, $f(x) = f(-x)$, derivando si ottiene $f'(x) = -f'(-x)$ e quindi f' è dispari. Analogamente se f è dispari, f' è pari.

Inoltre, se g è una qualsiasi funzione dispari, allora $g(0) = 0$ (infatti, $g(0) = g(-0) = -g(0)$ da cui $g(0) = 0$).

Mettendo insieme queste due cose, otteniamo che:
– se f è pari allora tutte le sue derivate di ordine dispari sono funzioni dispari e quindi nulle nell'origine;
– se f è dispari allora tutte le sue derivate di ordine pari sono funzioni dispari e quindi nulle nell'origine.

- *Esercizio.* Calcolare il polinomio di Taylor di grado 4, centrato in 0, della funzione
$$f(x) = \tan x\,.$$
(Ci sono due possibili modi: (a) derivare; (b) usando i noti sviluppi di $\sin x$, $\cos x$ insieme al fatto che f è dispari.)

21/01/2015 [2 ore: 54,55]

Numeri complessi, il campo complesso

- Definizione di un numero complesso: $z = x + yi$ dove $x, y \in \mathbb{R}$ e i è un simbolo detto "unità immaginaria".
Denotiamo con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

- Per un numero complesso $z = x + yi$ definiamo:
  - la *parte reale* e la *parte immaginaria* di z: $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$ (anche la parte immaginaria è un numero reale!);
  - il *coniugato* di z: $\bar{z} = x - yi$;
  - il *modulo* di z: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (è un numero reale ≥ 0).

- *Osservazioni.*
  (i) $|\bar{z}| = |z|$.
  (ii) Ogni numero reale α può essere considerato come il numero complesso $\alpha + 0i$. In questo senso, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- *Le operazioni algebriche in* $\mathbb{C}$ si basano sulle operazioni algebriche in $\mathbb{R}$ e sulla regola
$$i^2 = -1.$$
Esempi: somma, coniugato, prodotto, potenza intera, quoziente.

- *Osservazione importante:* $z\,\bar{z} = |z|^2$.

- **Teorema.** $\mathbb{C}$ è un campo di cui $\mathbb{R}$ è un sottocampo.

- *Una curiosità.* $\mathbb{C}$ è un campo *non ordinabile*, cioè, non esiste alcun ordinamento su $\mathbb{C}$ che lo renda un campo ordinato.

  (*Linea della dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che $\mathbb{C}$ sia un campo ordinato con una relazione d'ordine "$<$". Allora, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z^2 > 0$. Ma allora $1 = 1^2 > 0$ e anche $-1 = i^2 > 0$, il che è una contraddizione.)

- *Esercizio.*
  (i) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$;
  (ii) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$;
  (iii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$, $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$ $(w \neq 0)$.

Forme di rappresentazione di un numero complesso z

1. *Forma algebrica*: $z = x + yi$.

2. *Forma vettoriale* (o cartesiana): $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Significato geometrico (nel piano cartesiano) del multiplo, della somma, del modulo.

3. *Forma trigonometrica* (solo per $z \neq 0$):

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove θ è l'angolo orientato in senso antiorario dalla semiretta positiva dell'asse reale alla semiretta dall'origine attraverso z. L'angolo θ, detto l'*argomento* di z, è determinato univocamente a meno di multipli interi di 2π.
In realtà, $\rho = |z|$ e θ sono le coordinate polari del punto (x, y).
Esempi.

4. *Forma esponenziale* (solo per $z \neq 0$): $z = |z|\,e^{i\theta}$.
Si tratta di una semplice abbreviazione della forma trigonometrica.

- **Teorema.** Siano $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = |z|e^{i\theta}$, $w = |w|e^{i\alpha}$. Allora

$$zw = |z|\,|w|\,e^{i(\theta+\alpha)}\,, \qquad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\,e^{i(\theta-\alpha)}\,.$$

- Da qui segue *il significato geometrico del prodotto* in $\mathbb{C}$: dati z, w come sopra, il prodotto zw si ottiene da z moltiplicandolo prima per il numero reale positivo $|w|$ e ruotandolo poi (in senso antiorario) attorno all'origine di un angolo pari all'argomento di w.
  Ad esempio, moltiplicare un numero complesso per i significa farlo ruotare attorno a 0 di $\frac{\pi}{2}$.

- Esempio. Determinare la forma trigonometrica di $\frac{-3+i\sqrt{3}}{1-i}$.

- **Corollario (formula di De Moivre).** Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = |z|e^{i\theta}$. Allora
  $$z^n = |z|^n \, e^{in\theta} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

- **Corollario (calcolo delle radici n-esime).** Siano $z_0 \neq 0$ un numero complesso, $n \in \mathbb{N}$. Allora l'equazione
  $$w^n = z_0$$
  ha esattamente n distinte soluzioni in $\mathbb{C}$; esse possono essere calcolate come segue, partendo dalla forma esponenziale $z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}$:
  $$w_k = |z_0|^{1/n} \, e^{i(\frac{\theta_0}{n} + k\frac{2\pi}{n})} , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 .$$
  Si osservi che le n soluzioni $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ (dette le *radici n-esime di* z_0) giacciono sulla circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z_0|}$ centrata nell'origine e formano i vertici di un poligono regolare di n lati (inscritto in quella circonferenza).

- Esempio. Trovare le radici cubiche di $3i$.

- **Teorema fondamentale dell'algebra.** Sia $n \in \mathbb{N}$. Per ogni polinomio P di grado n in variabile complessa e con coefficienti complessi, cioè
  $$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad \text{con } a_k \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,\ z \in \mathbb{C},$$
  esistono n numeri complessi $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (non necessariamente tra loro distinti) tali che
  $$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) \qquad (z \in \mathbb{Z}).$$
  In particolare, ogni polinomio ha almeno una radice in $\mathbb{C}$ (il che non è vero in $\mathbb{R}$: si consideri, ad es., $P(x) = x^2 + 1$).

- Esempi di esercizi. Risolvere in $\mathbb{C}$:
  (i) $z\,|z|^2 - 4i\bar{z} = 0$;
  (ii) $z^2 + (1+i)z - i = 0$.

FINE DEL CORSO