Breve descrizione del

CONTENUTO DELLE LEZIONI

Analisi Matematica 1 (corso B)

corso di laurea triennale in FISICA

L. Vesely, 2015–2016

21/09/2015 [1 ora: n. 1]

- Introduzione al corso: organizzazione, contenuti.

- Classi numeriche:
  - Insieme dei *numeri naturali*: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
  - Insieme degli *interi nonnegativi*: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
  - Insieme dei *numeri interi (relativi)*: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
  - Insieme dei *numeri razionali*: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : \ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$.

- In realtà, ogni numero razionale ammette più di una (infinite!) rappresentazioni in forma di una frazione: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{111}{333} = \ldots$. Ma ogni numero razionale x ammette un'*unica* rappresentazione del tipo
$$x = \frac{p}{q} \quad \text{con } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ primi tra loro.}$$

- *Osservazione.* Gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ sono chiusi rispetto all'addizione e il prodotto, ma non rispetto alla sottrazione.
  $\mathbb{Z}$ è chiuso anche rispetto alla sottrazione, ma non rispetto alla divisione.
  $\mathbb{Q}$ è chiuso rispetto a tutte e quattro le operazioni aritmetiche (nella divisione vengono considerati solo divisori non nulli).

23/09/2015 [2 ore: n. 2,3]

- *Inclusioni delle classi numeriche:*
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$
dove $\mathbb{R}$ è il campo dei numeri reali (che definiremo tra poco), e $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi (che tratteremo alla fine del corso).

  L'inclusione "$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$" va intesa in questo modo: ad ogni $n \in \mathbb{Z}$ associamo la frazione $\frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$, definendo così una funzione $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Questa funzione è iniettiva (ma non suriettiva), e quindi essa definisce una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Z}$ e il sottoinsieme $f(\mathbb{Z})$ di $\mathbb{Q}$. In altre parole, l'inclusione "$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$" ha senso se identifichiamo ogni numero intero n con la corrispondente frazione $\frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$.

- Le operazioni e l'ordine su $\mathbb{Q}$. Rappresentazione dei numeri razionali sulla retta.

- Allineamenti (sviluppi) decimali.
  Un *allineamento decimale* è una sequenza

$$c_0, c_1c_2c_3 \ldots ,$$

  dove $c_0 \in \mathbb{Z}$ e $c_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ per $k \geq 1$, tale che non termini con il periodo $\bar{9}$. Un *allineamento decimale periodico* è un allineamento che termini con un periodo (di qualche lunghezza finita), ad esempio,

$$223, 45612612612 \ldots = 223, 45\overline{612} .$$

  Ad ogni numero razionale corrisponde un allineamento decimale periodico.
  Infatti, dato $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (dove $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$), è sufficiente svolgere la divisione $p : q$ per ottenere un allineamento decimale; inoltre, ragionando sui possibili resti che compaiono nello svolgimento della divisione (ve ne sono solo un numero finito: $0, 1, \ldots, q - 1$), si deduce facilmente che l'allineamento ottenuto è necessariamente periodico.

  E vale anche il vice versa: *ogni allineamento decimale periodico proviene da un (e uno solo) numero razionale.*

  Quindi vi è una *corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$ e l'insieme degli allineamenti decimali periodici (non contenenti $\overline{9}$).* In altre parole, possiamo identificare un numero razionale con il suo allineamento (periodico).

- **Definizione.** Un *campo ordinato* è un insieme X su cui sono definite due operazioni binarie $+$ e $\cdot$ insieme ad una relazione d'ordine $<$ [più precisamente, è una quaterna ordinata $(X, +, \cdot, <)$], avente le seguenti proprietà:
  (a) $(X, +, \cdot)$ è un *campo*, cioè: le due operazioni algebriche sono commutative e associative, ciascuna ammette un elemento neutro ($0 \in X$ per la somma, $1 \in X$ per il prodotto), ogni $x \in X$ ammette un opposto $-x \in X$ e ogni $x \in X \setminus \{0\}$ ammette un inverso $x^{-1} \in X$; inoltre le due operazioni sono legate insieme dalla legge distributiva.;

(b) $(X,<)$ è un *insieme (totalmente) ordinato*, cioè: la relazione $<$ è transitiva e ogni due elementi $x, y \in X$ sono confrontabili (vale a dire, si verifica una e una sola tra le seguenti: $x = y$, $x < y$, $y < x$);

(c) le operazioni algebriche e la relazione d'ordine sono legate insieme dalle seguenti due proprietà:
$x < y \Rightarrow x + z < y + z$, e $(x < y,\ z > 0) \Rightarrow xz < yz$.

- $\mathbb{Q}$ *è un campo ordinato*, mentre $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$ non lo sono.

- Ogni numero razionale positivo rappresenta una lunghezza, ma non tutte le lunghezze sono rappresentabili con numeri razionali. Ad es., $\sqrt{2}$ è una lunghezza (diagonale di un quadrato di lato unitario), ma: $\sqrt{2}$ *non è un numero razionale.*

- **Esercizi per voi.** Dimostrare:
  (i) $\sqrt[3]{7}$ è irrazionale;
  (ii) se $n \in \mathbb{N}$ non è una potenza di 10 allora $\log_{10} n$ è irrazionale;
  (iii) *(stimolante)* per ogni $k, n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[k]{n}$ è intero o irrazionale.

Numeri reali

- Definizione dei numeri reali come *tutti gli allineamenti decimali* (che non finiscano con $\overline{9}$).

- L'*ordine su* $\mathbb{R}$ viene definito come segue. Siano

$$x = x_0{,}x_1x_2x_3\ldots \quad \text{e} \quad y = y_0{,}y_1y_2y_3\ldots$$

due numeri reali distinti (e denotiamo, come al solito, $0 = 0{,}000\ldots$).
  - $x > 0$ se $x \neq 0$ e $x_0 \geq 0$.
  - $x < 0$ se $x \neq 0$ e $x_0 \leq 0$.
  - Per $x, y > 0$: sia $k \in \mathbb{N}_0$ il più piccolo indice tale che $x_k \neq y_k$; allora $x < y$ se $x_k < y_k$ (ordinamento *lessicografico*).
  - Per $x, y < 0$: $x < y$ se $-x > -y$.
  - Gli altri casi si ottengono dai precedenti imponendo la legge transitiva (se $u < v$ e $v < w$ allora $u < w$).

30/09/2015 [2 ore: n. 4,5]

- $(\mathbb{R}, <)$ (i numeri reali con l'ordine definito la volta scorsa) è un *insieme totalmente ordinato*. Inoltre, identificando ogni numero razionale con il suo allineamento decimale (periodico), possiamo considerare $\mathbb{Q}$ come un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.
  Importante: la relazione d'ordine originale di $\mathbb{Q}$ equivale a quella "ereditata" da $\mathbb{R}$ (essendo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$). In altre parole, su $\mathbb{Q}$ i due ordinamenti coincidono.

- *Osservazione.*
  (i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$: $x < n$ (*proprietà archimedea*).
  (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0\ \exists k \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{10^k} < x$.

- *Densità di* $\mathbb{Q}$ *e di* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$: tra ogni due numeri reali distinti vi sono infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali.

- Definizione di *intervallo* $I \subset \mathbb{R}$.
  Tipi di intervalli:
  $\emptyset$;
  $(a, b),\ [a, b),\ (a, b],\ [a, b]$,
  $(a, +\infty),\ [a, +\infty),\ (-\infty, b),\ (-\infty, b]$,
  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.
  Intervalli limitati/illimitati, aperti/chiusi/semiaperti.

- Definizioni di:
  insieme limitato superiormente (inferiormente); insieme limitato;
  maggiorante (minorante) di A;
  il massimo (minimo) di A, denotati con $\max A$, $\min A$;
  l'estremo superiore (inferiore) di A, denotati con $\sup A$, $\inf A$.

- *Osservazioni.*
  $x = \max A$ se e solo se $x \in A$ e x è un maggiornate per A.
  Se $x = \max A$, allora $x = \inf A$ (ma non vale il vice versa).
  $x = \max A$ se e solo se $x = \sup A$ e $x \in A$.

- *Tre esempi:* $A = [0, 3)$; $B = (-\infty, -\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$; $C = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

- **Teorema (completezza di $\mathbb{R}$, ovvero la proprietà dell'estremo superiore).**
  Per ogni insieme non vuoto e limitato superiormente [inferiormente] $A \subseteq \mathbb{R}$ *esiste* $\sup A$ *[*$\inf A$*].*

- *Significato intuitivo del teorema della completezza:* i numeri reali, se rappresentati su una retta, riempiono tutta la retta. In altre parole, i numeri reali possono rappresentare tutte le distanze che compaiono in geometria.
  Si osservi che *il campo ordinato $\mathbb{Q}$ non è completo.*

- *Le troncate di un numero reale.* Dati un numero reale $x = x_0, x_1x_2x_3\dots$ e $n \in \mathbb{N}$, possiamo definire *l'n-esima troncata di x* come il numero razionale
  $$x^{(n)} = m, c_1 \dots c_n \overline{0}\,.$$
  Se $x > 0$, allora $0 \le x - x^{(n)} < 10^{-n}$, da cui si dimostra che
  $x = \sup\{x^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$.

5/10/2015 [2 ore: n. 6,7]

- *Ripasso – la parte intera di un numero reale x:*
  $$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$$
  (in altre parole, $[x]$ è il più grande intero che non dsuperi x). Ad esempio,
  $$[\sqrt{2}\,] = 1,\ [-\sqrt{2}\,] = -2,\ [4] = 4,\ [-4] = -4.$$

- *Numeri reali estesi:* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
  Ordinamento su $\overline{\mathbb{R}}$.

- **Convenzione.** Se $A \subset \mathbb{R}$ è illimitato superiormente [inferiormente], definiamo $\sup A := +\infty$ [$\inf A := -\infty$].
  Inoltre, definiamo: $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.

- **Operazioni algebriche in $\mathbb{R}$**
  Siano $x = x_0{,}x_1x_2\dots$ e $y = y_0{,}y_1y_2\dots$ due numeri reali.
  Ricordiamo che
  $$y^{(n)} = y_0{,}y_1 \dots y_n \overline{0}\,.$$
  Ora, possiamo definire:
  $x + y := \sup\{x + y^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ per $x, y > 0$; $x - y := \inf\{x - y^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ per $x > y > 0$.
  Estendendo in modo naturale queste due definizioni, possiamo definire la somma e la differenza di qualsiasi due numeri reali.

  In modo analogo si possono definire il prodotto xy (per $x, y \in \mathbb{R}$) e il quoziente $\frac{x}{y}$ (per $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$).

- **Teorema.**
  Con le sue operazioni algebriche e la relazione d'ordine, $\mathbb{R}$ *è un campo ordinato completo* (cioè, con la proprietà del "sup") *di cui* $\mathbb{Q}$ *è un sottocampo, denso in* $\mathbb{R}$.

- **Una curiosità.**
  "A meno di isomorfismi", $\mathbb{R}$ *è l'unico campo ordinato completo,* cioè, se $(X, \oplus, \odot, <_X)$ è un campo ordinato completo, esiste una corrispondenza biunivoca tra X e $\mathbb{R}$ che "rispetta le operazioni algebriche e l'ordinamento di X e quelli di $\mathbb{R}$". In parole povere, gli elementi di X possono essere identificati con numeri reali senza compromettere le operazioni e l'ordine di X.

- Esistenza della radice n-esima per ogni $x > 0$. Estensione a $x = 0$ (per ogni $n \in \mathbb{N}$) e a $x < 0$ (per n dispari).
  Definiamo inoltre $x^{1/n} := \sqrt[n]{x}$ qualora il secondo membro è definito.

- Attenzione! Bisogna distinguere tra le soluzioni reali dell'equazione $x^n = a$ (che possono essere una o due se $a > 0$) e la radice $\sqrt[n]{a}$ che è la (unica) soluzione positiva. (Ad esempio, mentre l'equazione $x^2 = 4$ ha due soluzioni reali $x = \pm 2$, abbiamo $\sqrt{4} = 2$. Quindi è sbagliato scrivere "$\sqrt{4} = \pm 2$".)

- *Potenze razionali.* Dati $m, n \in \mathbb{N}$, definiamo
  $$x^{m/n} := \sqrt[n]{x^m}$$
  e anche
  $$x^{-m/n} := \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$$
  per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui le espressioni al secondo membro hanno senso.

- *Potenze reali.* Definizione di x^p (con $p > 0$) per $x \geq 1$, per $x \in (0, 1)$.
  Estensione a $p < 0$.
  <u>N.B.</u>: Se p è irrazionale, la potenza x^p non è definita per $x < 0$.

- *Esistenza di logaritmi.* Per ogni $1 \neq b > 0$ e ogni $x > 0$, l'equazione
  $$b^y = x$$
  ha una e una sola soluzione $y \in \mathbb{R}$. Tale y viene chiamato *logaritmo in base b di x* e denotato con
  $$\log_b x\,.$$

- *Esempi.*
Grafici di: $x^{2/3}$, $x^{7/5}$, $x^{3/8}$, $x^{-3/5}$, $x^{-7/6}$, $x^{-4/3}$, $x^{\sqrt{2}}$, $x^{\sqrt{3}/2}$, $x^{-2\sqrt{5}}$.
Attenzione! Bisogna saper bene disegnare i grafici delle varie potenze (estese al massimo possibile insieme di definizione).

- *Esercizio.*
  (i) La somma e il prodotto di due razionali sono numeri razionali.
  (ii) La somma di un razionale e un irrazionale è un numero irrazionale.
  (iii) Il prodotto di un razionale non nullo e un irrazionale è irrazionale.
  (iv) La somma di due irrazionali può essere razionale o irrazionale, e lo stesso vale per il prodotto.

- *Esercizio per voi.* Per ciascuna delle seguenti funzioni stabilire se è iniettiva/suriettiva.
  (i) $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(m,n) = \frac{m}{n}$.
  (ii) $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $g(x) = (p,q)$ dove $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p, q primi tra loro.

Spazi euclidei

- Ripasso: il *prodotto cartesiano* $X \times Y$ di due insiemi X, Y è definito come
$$X \times Y := \big\{(x,y) : \ x \in X, \ y \in Y\big\} ,$$
cioè, l'insieme di tutte le coppie <u>ordinate</u> aventi al primo posto un elemento di X e al secondo un elemento di Y.
Analogamente, gli elementi del prodotto cartesiano $X \times Y \times Z$ saranno terne ordinate, e quelli di $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ (prodotto cartesiano di n insiemi $X_1, \ldots, X_n$) saranno n-uple ordinate.
Se X è un insieme e $n \in \mathbb{N}$, definiamo
$$X^n := X \times X \times \cdots \times X \qquad (n \text{ volte}).$$

- *Spazio euclideo di dimensione n :*
$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} .$$
I suoi elementi sono *vettori* $\underline{\mathrm{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$.
Con *scalari* intendiamo elementi di $\mathbb{R}$.

- Operazioni: somma di due vettori, prodotto di uno scalare e un vettore, prodotto interno (scalare) di due vettori. Alcune proprietà delle operazioni.

7/10/2015 [2 ore: n. 8,9]

- *Proprietà del prodotto scalare:* simmetria, omogeneità (in ciascuno dei due fattori), additività (in ciascuno dei due fattori).
- Norma euclidea (lunghezza): $\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
- *Osservazione.* $\|\underline{x}\| = \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle$.
- *Proprietà della norma* (dimostrate):
  (1) $\|\underline{x}\| \geq 0$;
  (2) $\|\underline{x}\| = 0$ se e solo se $\underline{x} = \underline{0}$;
  (3) $\|t\underline{x}\| = |t| \, \|\underline{x}\|$ ($t \in \mathbb{R}$); [*omogeneità positiva*]
  (4) $\|\underline{x} \pm \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$; [*disuguaglianza triangolare*]
  (4') $\|\underline{x} \pm \underline{y}\| \geq \big| \|\underline{x}\| - \|\underline{y}\| \big|$; [*2ª disug. triangolare*]
  (5) $\big|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle\big| \leq \|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|$. [*disug. di Cauchy*]
- Dalla disuguaglianza di Cauchy si vede subito che, per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$:
$$-1 \leq \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|} \leq 1.$$
Dal punto di vista geometrico, si ha che
$$\frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|} = \cos\alpha$$
dove $\alpha \in [0, \pi]$ è l'angolo tra i vettori $\underline{x}, \underline{y}$. In particolare,
$$\underline{x} \perp \underline{y} \text{ se e solo se } \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0.$$

Potenza (cardinalità) di un insieme

"Quanti elementi ha un insieme (non necessariamente finito)?"

- Insiemi equipotenti (notazioni: $X \sim Y$, $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathrm{Y}$).
Diciamo che $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ se X è equipotente ad un sottoinsieme (non necessariamente proprio) di Y.
Diciamo che $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$ se $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ e X, Y non sono equipotenti.
La "$\sim$" è una relazione di equivalenza (rifl., simm., transit.).
Esempio: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

- Insiemi finiti (cioè, l'insieme vuoto e gli insiemi equipotenti a qualche $\{1, 2, \ldots, n\}$), insiemi infiniti.

- *Insiemi numerabili* – definizione. Esempi: $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}$ sono numerabili.

1. Un sottoinsieme infinito di un numerabile è anch'esso numerabile. (In altre parole, la potenza del numerabile è la più piccola cardinalità infinita.)

2. L'unione di due (o di un numero finito di) insiemi numerabili è numerabile.

3. Il prodotto cartesiano di un numero <u>finito</u> di insiemi numerabili è numerabile.

12/10/2015 [2 ore: n. 10,11]

- Ripasso.
  Esempio: gli insiemi P, D rispettivamente dei naturali pari e dispari sono entrambi numerabili.

- Un insieme *al più numerabile* è un insieme finito o numerabile.
  Osserviamo che l'unione di un insieme numerabile e un insieme al più numerabile è numerabile.

- *Teorema.* $\mathbb{Q}$ è numerabile.
  (Idea della dimostrazione: la funzione $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, data da $g(x) = (p, q)$ dove $x = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p, q primi tra loro; che è iniettiva, mostra che l'insieme infinito $\mathbb{Q}$ è equipotente ad un sottoinsieme dell'insieme numerabile $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.)

- *Teorema.* Dati infiniti insiemi numerabili
  $$X_1, X_2, X_3, \ldots$$
  anche la loro unione $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ è numerabile.
  (Idea: se gli insiemi sono a due a due disgiunti, allora è facile vedere che X è equipotente a $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Se non lo sono, l'unione è infinita e "più piccola" rispetto al caso precedente.)

- *Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.* (Infatti, procedendo induttivamente, possiamo "estrarre" da X infiniti elementi $x_1, x_2, \ldots$ tra loro distinti; essi formano un sottoinsieme numerabile $X_0 \subset X$.)

- *Corollario.* Se X è infinito e A è al più numerabile, allora $X \cup A \sim X$. (Idea: sia $X_0 \subset X$ un sottoinsieme numerabile; scriviamo
$$X \cup A = (X \setminus X_0) \cup X_0 \cup A\,;$$
sappiamo già che $X_0 \cup A \sim X_0$, e quindi $X \cup A \sim (X \setminus X_0) \cup X_0 = X$.)

- **Cardinalità di $\mathbb{R}$ ("cardinalità del continuo").**
  - $\mathbb{R} \sim (0,1)$.
  - **Teorema di Cantor.** *L'insieme dei numeri reali* $\mathbb{R}$ *non è numerabile.*
    Quindi: $\operatorname{card} \mathbb{R} > \operatorname{card} \mathbb{N}$.
  - *Corollario.* $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} \sim \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- **Esercizio per voi.** Dimostrate che ogni intervallo non degenere (cioè, contenente almeno due punti) ha la cardinalità del continuo.

- **L'insieme delle parti** (fatto senza dimostrazioni).
  - L'*insieme delle parti* di un insieme X è l'insieme $\mathcal{P}(X)$ di tutti i sottoinsiemi di X (inclusi $\emptyset$ e X).
  - Esempi: $\mathcal{P}(X)$ per $X = \{1,2\}$ e per $X = \emptyset$.
  - *Teorema.* Per ogni insieme X, $\operatorname{card} \mathcal{P}(X) > \operatorname{card} X$.
  - *Teorema.* $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.

Spazi metrici

- Definizione di spazio metrico (X, d).

- **Esempi.**
  (i) *Metrica euclidea su* $\mathbb{R}$: $d(x,y) = |x-y|$.
  (ii) *Metrica euclidea su* $\mathbb{R}^n$: $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$. Tale metrica è *invariante per traslazioni.*
  [Più in generale, se $|||\cdot|||$ è una norma qualsiasi su $\mathbb{R}^n$ (cioè, se soddisfa le proprietà (1)–(4) della norma euclidea), allora la formula $d(\underline{x}, \underline{y}) = |||\underline{x} - \underline{y}|||$ definisce una metrica (invar. per traslazioni) su $\mathbb{R}^n$.]

(iii) Metrica data da una funzione iniettiva $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Tale metrica può essere limitata o non invariante per traslazioni; ad es., $d(x, y) := |\arctan x - \arctan y|$.

(iv) *Metrica discreta* su un insieme X:

$$d(x, y) = 0 \text{ se } x = y;\ d(x, y) = 1 \text{ se } x \neq y.$$

(v) Esempio di una metrica a tre valori:
$X =$ l'insieme delle persone presenti nell'aula;
$d(x, y) = 0$ se $x = y$; $d(x, y) = 1$ se x, y sono diversi ma dello stesso sesso; $d(x, y) = 2$ altrimenti.

(vi) Metrica "delle due stanze".

- In uno spazio metrico (X, d), dati un punto $x \in X$ e $r > 0$, l'*intorno (sferico)* di x di raggio r è l'insieme

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

- Esempi: 1) Intorni nel piano euclideo; 2) intorni nella metrica discreta.

13/10/2015 [2 ore: n. 12,13]

- Altri esempi di intorni.

(i) In $X = \mathbb{R}$ euclideo.

(ii) In $X = \mathbb{R}^2$ con le metriche (tutte invarianti per traslazioni) del tipo $d_p(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_p$, dove

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$
$$\|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$$
$$\|\underline{x}\|_p = \big(|x_1|^p + |x_2|^p\big)^{1/p} \quad (1 < p < +\infty)$$

sono delle norme su $\mathbb{R}^2$. (Si noti che $\|\cdot\|_2$ è in realtà la norma euclidea.)
In generale, una qualsiasi norma su $\mathbb{R}^n$ genera una metrica invariante per traslazioni (ma esistono metriche non generate da alcuna norma; v. l'esempio successivo).

(iii) In $X = \mathbb{R}$ con la metrica $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ (che <u>non</u> è invariante per traslazioni!).

- *Punti interni, esterni e di frontiera* di un insieme. L'*interno* A°, la *frontiera* ∂A.
  Esempi vari: $A = X$; $A = \emptyset$; $A = (-2, 3]$ (in $\mathbb{R}$); $A = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$; $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$; $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$; $A = (0, 1) \cup \big[\, (2, 3) \cap \mathbb{Q} \,\big]$ (in $\mathbb{R}$).

- Teorema: la *proprietà di Hausdorff* (di ogni spazio metrico).

- Punti *isolati* e *di accumulazione* di un insieme. L'*insieme derivato* A'. Esempi.

- *Osservazione.*
  (i) Se $x \in A'$ allora ogni intorno di x contiene infiniti punti di A.
  (ii) Di conseguenza, se A è finito allora $A' = \emptyset$.

- Insiemi *aperti*, insiemi *chiusi*.

- *Osservazione.* Esistono insiemi che non sono né aperti né chiusi, ad es., l'intervallo $[0, 1)$ (in $\mathbb{R}$ euclideo).

19/10/2015 [2 ore: n. 14,15]

- *Lemma.* Ogni intorno sferico $B(x, r)$ è un insieme aperto. [dimostrato]

- **Esecizio per voi.** Dati: uno spazio metrico (X, d), un punto $x \in X$, e $r > 0$, definiamo
  $$\overline{B}(x, r) := \{y \in X : d(y, x) \leq r\}.$$
  Dimostrare che $\overline{B}(x, r)$ è un insieme chiuso.

- **Teorema (charatterizzazioni di insiemi chiusi).** *Siano: (X, d) uno spazio metrico e $A \subset X$. Allora le seguenti sono equivalenti:*
  (i) *A è chiuso;*
  (ii) *A contiene tutti i suoi punti di frontiera;*
  (iii) *A contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

- *Ripasso* delle leggi di De Morgan – per una qualsiasi famiglia di insiemi:
  (a) il complementare di dell'unione è l'intersezione dei complementari;
  (b) il complementare di dell'intersezione è l'unione dei complementari.

- **Teorema.**
  (a) *Le unioni (qualsiasi) di aperti sono insiemi aperti.*
  (b) *Le intersezioni finite di aperti sono insiemi aperti.*
  (a') *Le intersezioni (qualsiasi) di chiusi sono insiemi chiusi.*
  (b') *Le unioni finite di chiusi sono insiemi chiusi.*

- *Esempi.* $A_n = (-1/n, 1/n)$, $B_n = [1/n, 2]$ $(n \in \mathbb{N})$. Allora:
  (a) gli A_n sono tutti aperti, ma $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ non lo è;
  (b) i B_n sono tutti chiusi, ma $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ non lo è.

- *Definizione.* La *chiusura* di un insieme A: $\overline{A} := A \cup A'$.

- *Esempi.*
  (i) Chiusura degli insiemi: $A = [0,1)$, $B = \mathbb{N}$, $C = \mathbb{Q}$,
  $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
  (ii) Sia $E = E_1 \cup E_2$ dove
  $E_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \big[(0,1) \cap \mathbb{Q}\big] \cup (2,3)\Big\}$,
  $E_2 = \Big\{(4 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\Big\}$. Determinare: E°, ∂E, E', $\overline{E}$.
  (Commento. In esercizi di questo tipo ci sono tre cose da saper fare: 1) capire come è fatto l'insieme dato, 2) capire come sono fatti gli insiemi richiesti, 3) scrivere in modo corretto gli insiemi richiesti.)

- **Teorema (proprietà della chiusura).**
  (i) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
  (ii) $\overline{A}$ è un insieme chiuso contenente A.
  (iii) $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso contenente A, cioè, se C è chiuso e $A \subset C$ allora $\overline{A} \subset C$.
  (iv) A è chiuso se e solo se $\overline{A} = A$.

- Definizione di *diametro* di un insieme non vuoto A (notazione $\operatorname{diam} A$). L'insieme A viene detto *limitato* se $A = \emptyset$ oppure $A \neq \emptyset$ con $\operatorname{diam} A < +\infty$.

- *Esempi.*
  (i) In $\mathbb{R}^n$ (euclideo): $\operatorname{diam} B(\underline{x}, r) = 2r$.
  (ii) Nella metrica discreta (su un insieme X):

$$\operatorname{diam} B(\underline{x}, r) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < r \leq 1, \\ 1 & \text{se } r > 1. \end{cases}$$

(iii) In $\mathbb{R}$ (per $A \neq \emptyset$): $\operatorname{diam} A = \sup A - \inf A$.
Ne segue che A è limitato (nel senso di $\operatorname{diam} A < +\infty$) se e solo se A è limitato sia superiormente sia inferiormente (cioè, è limitato nel senso dell'ordine su $\mathbb{R}$).

- *Caratterizzazione di limitatezza.* Sia A un insieme non vuoto in uno spazio metrico (X, d). Le seguenti sono equivalenti:
  (i) A è limitato;
  (ii) esistono $x_0 \in X$ e $r > 0$ tali che $A \subset B(x_0, r)$;
  (iii) per ogni $x \in X$ esiste $r = r_x > 0$ tale che $A \subset B(x, r)$.

- **Proprietà valide definitivamente.** Sia $\mathcal{P}$ una proprietà che un numero naturale può avere o meno. Diciamo che $\mathcal{P}$ *vale definitivamente* se vale per ogni $n \in \mathbb{N}$ che sia sufficientemente grande, cioè,

  se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{P}$ valga per ogni $n \geq n_0$.

- **Esercizio per voi.**
  (i) La proprietà " essere pari" non vale definitivamente (anche se vale per infiniti $n \in \mathbb{N}$).
  (ii) $n^2 - 1000n - 2000 > 0$ definitivamente.

21/10/2015 [2 ore: n. 16,17]

- Si noti che

  $$\mathcal{P} \text{ vale definitivamente} \Rightarrow \mathcal{P} \text{ vale per infiniti } n,$$

  ma non vale il vice versa!

- *Osservazione utile.* Supponiamo che ciascuna delle proprietà $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ valga definitivamente. Allora anche la proprietà $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ vale definitivamente.

- **Successioni.** Sia X u insieme non vuoto. Una *successione di elementi di X* (o semplicemente, successione in X) è, in parole povere, una sequenza infinita

  $$x_1, x_2, x_3, \ldots \qquad \text{con } x_n \in X$$

  con eventuali ripetizioni. In altre parole, ad ogni $n \in \mathbb{N}$ viene associato un elemento $x_n \in X$. Otteniamo così la definizione formale:
  una successione in X è una qualsiasi funzione $f\colon \mathbb{N} \to X$.
  Il suo *termine n-esimo* è $x_n := f(n) \in X$.

Esempio di una successione in $\mathbb{N}$ (o in $\mathbb{R}$):

$$\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,\ldots\}.$$

<u>*Esercizio per voi.*</u> Qual è il 150^o termine di questa successione?

- *Attenzione*, una successione (ad es., $\{1,2,3,1,2,3,1,2,3,\ldots\}$) è una cosa diversa dal suo insieme immagine (nel nostro esempio, $\{1,2,3\}$).

  Una successione $\{x_n\}$ (in uno spazio metrico) è detta *limitata* se il suo insieme immagine $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato. In altre parole, se esistono $x_0 \in X$ e $r > 0$ con $x_n \in B(x_0, r)$ per ogni n.

- Definizione di "$x_n \to p$". Definizione di *successione convergente.*

- *Osservazione.* Ciascuna delle seguenti affermazioni è equivalente a dire che $x_n \to p$.
  (i) $\forall \varepsilon > 0$: $d(x_n, p) \leq \varepsilon$ definitivamente.
  (ii) $\forall \varepsilon > 0$: $d(x_n, p) < 10\varepsilon$ definitivamente.
  (iii) $\forall \varepsilon > 0$: $d(x_n, p) \leq \sqrt{\varepsilon}$ definitivamente.

- Teorema di *unicità del limite.*

- Esempi.

- *Nella metrica discreta, le successioni convergenti coincidono con quelle definitivamente costanti.* (In generale, ogni successione che sia definitivamente costante è –ovviamente– convergente, ma il vice versa può non valere.)

- *Osservazioni.*
  (i) Se $x_n = y_n$ definitivamente, allora: $x_n \to p \Leftrightarrow y_n \to p$.
  (ii) $x_n \to p$ in (X, d) se e solo se $d(x_n, p) \to 0$ in $\mathbb{R}$.

- Una *sottosuccessione* di $\{x_n\}$ è una qualsiasi successione del tipo $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ dove $n_1 < n_2 < \ldots$ sono numeri naturali.
  Ciascuna delle seguenti successioni è una sottosuccessione di $\{\frac{1}{n}\}$: $\{\frac{1}{2k}\}$, $\{\frac{1}{n!}\}$, $\{\frac{1}{m+3}\}$.

- **Teorema.** Una successione converge a p se e solo se tutte le sue sottosuccessioni convergono a p.

- **Teorema.** Ogni successione convergente è limitata.
  Ma non vale il vice versa (si veda $\{(-1)^n\}$) !

- **Successioni in spazi euclidei.**
Per non dover utilizzare due indici, useremo la seguente notazione per le coordinate di un vettore $\underline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}^d$:
$$\underline{\mathrm{x}} = \big(x(1), x(2), \dots, x(d)\big) .$$
  - **Lemma.** Per ogni $\underline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}^d$ si ha:
  $$\|\underline{\mathrm{x}}\|_\infty \le \|\underline{\mathrm{x}}\| \le \|\underline{\mathrm{x}}\|_1 \le d\|\underline{\mathrm{x}}\|_\infty$$
  (per le definizioni delle norme si veda la lezione del 13/10; la $\|\cdot\|$ denota la norma euclidea).

    Usando questo lemma, si può dimostrare facilmente il seguente teorema. (A lezione è stata solo accennata la dimostrazione dell'implicazione "la convergenza per coordinate implica la convergenza in $\mathbb{R}^d$", usando la seconda disuguaglianza del Lemma. L'altra implicazione non è stata dimostrata.)
  - **Teorema.** Una successione $\{\underline{x}_n\}$ in $\mathbb{R}^d$ converge a $\underline{p}$ in $\mathbb{R}^d$ se e solo se vi "converge per coordinate", cioè,
  $$\forall i \in \{1, 2, \dots, d\} : \quad x_n(i) \to p(i) \;\text{ per } n \to +\infty.$$
  - *Esempio.* Consideriamo $\underline{x}_n = (1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$ in $\mathbb{R}^2$. Siccome $1 - \frac{1}{n} \to 1$ e $2 + \frac{1}{n} \to 2$, possiamo concludere che $\underline{x}_n \to (1, 2)$.

26/10/2015 [2 ore: n. 18,19]

- **Convenzione.** *Da adesso in poi, considereremo successioni anche quelle definite solo definitivamente.*
Commento: la "successione" $\{\frac{1}{n-3}\}$ non sarebbe una successione secondo la nostra definizione iniziale [v. la volta scorsa] perché non è definita per $n = 3$; d'altra parte, essa è definita sicuramente per ogni $n \ge 4$, e quindi definitivamente, e ha senso parlare del suo limite (che vale 0). Ricapitolando in modo formale la nostra convenzione, d'ora in poi chiameremo *successione in X* ogni funzione del tipo
$$f \colon \{m, m+1, m+2, \dots\} \to X$$
per un opportuno $m \in \mathbb{N}$ fissato.
Esempio: $\{\frac{1}{1+(-1)^n}\}$ non è una successione (neanche secondo questa definzione appena estesa).

Successioni in $\mathbb{R}$

- Intorno destro [sinistro] di raggio $\varepsilon > 0$ di $p \in \mathbb{R}$: $[p, p+\varepsilon)$ ($(p-\varepsilon, p]$).
  Intorni di $+\infty$: $(M, +\infty)$ dove $M \in \mathbb{R}$.
  Intorni di $-\infty$: $(-\infty, M)$ dove $M \in \mathbb{R}$.

- Definizioni di $x_n \to p^+$ (*per eccesso* o *da destra*) e $x_n \to p^-$ (*per difetto* o *da sinistra*).

- Definizione di $x_n \to +\infty$ e di $x_n \to -\infty$.

- Definizione di *comportamento di una successione* (successioni *regolari*, cioè quelle *convergenti* e quelle *divergenti*; successioni irregolari ovvero *oscillanti*). Esempi.

- Operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$.

- Teorema su limiti e le operazioni algebriche.

- **Teorema (limiti e funzioni elementari).** Sia f una delle funzioni elementari (cioè, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche, quelle trigonometriche inverse e le funzioni iperboliche [che vedremo più in avanti]) con l'insieme di definizione D ($\subset \mathbb{R}$). Se $\{x_n\} \subset D$, $x \in D$ e $x_n \to x$, allora anche $f(x_n) \to f(x)$.

- **Notazione.** Se $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{R}$, $y_n \neq 0$ almeno definitivamente e
  $$\frac{x_n}{y_n} \to 0$$
  (cioè, "x_n è trascurabile rispetto a y_n"), allora scriveremo
  $$x_n \ll y_n \quad \text{oppure} \quad x_n = o(y_n).$$
  (La seconda formula, che è quella standard, si legge "x_n è *o piccolo* di y_n".)

- **Teorema (gerarchia di infiniti).** Siano $a > 1$, $b > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Allora
  $$\log_b^\beta n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n .$$

- *Teorema della permanenza del segno* – con dimostrazione.

- *Teorema del confronto* – con dim.

- *Corollario importante.* Se $x_n \to 0$ e $\{y_n\}$ è limitata allora $x_n y_n \to 0$.

28/10/2015 [2 ore: n. 20,21]

- Il comportamento delle successioni geometriche $\{q^n\}$.

- **Teorema (criterio del rapporto).** *Sia* $\{x_n\}$ *una successione di numeri reali non nulli. Supponiamo che esista il limite*

(1)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \ell$$

  (che ovviamente appartiene a $[0,+\infty]$*).*
  (a) *Se* $\ell < 1$*, allora esistono* $c > 0$ *e* $q \in (0,1)$ *tali che*
  $$|x_n| \le c\,q^n \quad \textit{definitivamente,}$$
  e quindi $x_n \to 0$*.*
  (b) *Se* $\ell > 1$*, allora esistono* $c > 0$ *e* $q > 1$ *tali che*
  $$|x_n| \ge c\,q^n \quad \textit{definitivamente,}$$
  e quindi $|x_n| \to +\infty$*.*
  N.B.: Il criterio non dice niente a proposito del caso $\ell = 1$.

- **Esercizio importante (criterio della radice).** Dimostrate che *lo stesso teorema vale anche se il limite* (1) *viene sostituito con*
  $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \ell\,.$$
  (In questo caso non è necessario supporre che $x_n \neq 0$.)

- **Teorema (gerarchia di infiniti – una generalizzazione).** Siano $a > 1$, $b > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Se $\{z_n\}$ è una successione in $(0,+\infty)$ tale che $z_n \to +\infty$, allora
  $$\log_b^\beta z_n \ll (z_n)^\alpha \ll a^{z_n} \ll [z_n]! \ll (z_n)^{z_n}\,.$$
  ($[t]$ denota la parte intera di t).

- **Successioni monotone** - definizione di: successione *strettamente crescente*; succ. *strettamente decrescente*; succ. *non decrescente* o *crescente in senso lato*; succ. *non crescente* o *decrescente in senso lato.*

- **Teorema (limiti di successioni monotone).** Ogni successione monotona è regolare, cioè, è convergente o divergente. Più precisamente:
  (i) se $\{x_n\}$ è monotona crescente (almeno) in senso lato, allora $x_n \to \ell := \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

(ii) se $\{x_n\}$ è monotona decrescente (almeno) in senso lato, allora $x_n \to \ell := \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

- *Corollario.* Ogni successione monotona e limitata è convergente.

- **Teorema (il numero di Nepero e).**
La successione
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
è strettamente crescente e limitata. Quindi essa è convergente:
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e \in \mathbb{R} \quad \textit{dove } e > 0. \tag{2}$$
Si può dimostrare che il numero e è irrazionale con
$$e = 2{,}718281828459\ldots .$$

- **Limiti notevoli** – quelli derivati dalla definizione del numero e.

02/11/2015 [2 ore: n. 22,23]

- Il limite notevole del logaritmo può essere scritto nella seguente forma, spesso utile:
$$\frac{\log t_n}{t_n - 1} \to 1 \qquad \text{se } 1 \neq t_n \to 1.$$

- Limiti notevoli – completamento.

- Esempio: $\lim n^a \left(\sqrt[5]{n^5+n^3} - n\right)$

- Esempio: $x_n = (n^2+1)^{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}$

- $\sqrt[n]{n} \to 1$. (Curiosità: $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.)

- Esempio: $x_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^a[2\log(n+1)-\log(n^2+1)]}$

- Attenzione: la relazione $\frac{x_n}{y_n} \to 1$ <u>non</u> implica che $\frac{e^{x_n}}{e^{y_n}} \to 1$.

- Ma per i logaritmi di cui argomenti tendano a $+\infty$ o 0 vale:
se $\{x_n\}, \{y_n\}$ sono due successioni in $(0, +\infty)$ tali che:
(a) $x_n \to +\infty$ *oppure* $x_n \to 0$, *e*
(b) $\frac{x_n}{y_n} \to 1$,

allora anche
$$\frac{\log x_n}{\log y_n} \to 1\,.$$
(Commento: si noti che la proprietà (a) implica che essa vale anche per $\{y_n\}$ al posto di $\{x_n\}$.)

Condizione di Cauchy e completezza

- *Definizione.* Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione $\{x_n\} \subset X$ *soddisfa la condizione di Cauchy* (oppure *è una successione di Cauchy*) se
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ per ogni } m, n \geq n_0.$$
Ciò equivale a dire che
$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{diam} C_k = 0$$
dove $C_k = \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\}$ è la "coda k-esima" di $\{x_n\}$.
[esercizio per voi!]

- *Teoremino.* Per una successione $\{x_n\}$ (in uno spazio metrico X) valgono le seguenti implicazioni:
$$\{x_n\} \text{ è convergente in } X \;\Rightarrow\; \{x_n\} \text{ è di Cauchy} \;\Rightarrow\; \{x_n\} \text{ è limitata},$$
mentre le implicazioni inverse sono false.

04/11/2015 [2 ore: n. 24,25]

- *Definizione.* (X, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy $\{x_n\} \subset X$ è convergente in X.
(In altre parole, uno spazio metrico è completo se, per le successioni in esso, la prima implicazione nel Teoremino è in realtà un'equivalenza.)

- *Esempi di spazi metrici non completi:*
(i) $X = (0, 1 + \infty)$ (si consideri $x_n = 1/n$);
(ii) $X = \mathbb{Q}$ (si consideri una successione $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ tale che $x_n \to \sqrt{2}$ [in $\mathbb{R}$]);
(iii) $X = \mathbb{N}$ con la metrica $d(m, n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$ (si consideri $x_n = n$).

Ora sorgono naturali le seguenti domande:
esistono spazi metrici completi?;
lo spazio $\mathbb{R}$ *(euclideo) è completo o meno?*.

- **Esercizio per voi.** Lo spazio $\mathbb{R}$ con la metrica discreta è completo?

- **Lemma importante** *(Principio di intervalli compatti inscatolati).* Consideriamo una successione di intervalli (chiusi e limitati)

$$I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

tali che $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$. Allora:
(a) l'intersezione $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ non è vuota;
(b) se $\operatorname{diam} I_n \to 0$, allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{p\}$; inoltre, $a_n \to p$ e $b_n \to p$.

Idea della dimostrazione: essendo monotone e limitate, le successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ convergono (a α, β, rispettivamente). Si dimostra che $\alpha \leq \beta$ e che $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

- **Teorema.** $\mathbb{R}$ *(euclideo) è uno spazio metrico completo.*

Idea della dimostrazione: data una successione di Cauchy $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, considerare le "code"

$$C_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

e applicare il principio di intervalli chiusi inscatolati agli intervalli

$$I_n = [a_n, b_n]$$

dove

$$a_n = \inf C_n\,, \qquad b_n = \sup C_n\,.$$

Si dimostra che $x_n \to p$ dove $p \in \mathbb{R}$ è tale che $\bigcap_n I_n = \{p\}$.

- **Corollario.** *Per ogni $d \in \mathbb{N}$, lo spazio metrico $\mathbb{R}^d$ è completo.*

Idea: se $\{\underline{x}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ è di Cauchy, allora essa è "di Cauchy per coordinate". Secondo il teorema precedente, $\{\underline{x}_n\}$ converge per coordinate; e ciò significa che converge in $\mathbb{R}^d$.

Sottosuccessioni e classe limite in $\mathbb{R}$

- *Definizione.* Data una successione $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, la sua *classe limite* è l'insieme

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \mathcal{E}(\{x_n\}) \\ &:= \big\{p \in \overline{\mathbb{R}} : \text{ esiste una sottosucc. } \{x_{n_k}\} \text{ tale che } x_{n_k} \to p\big\}.\end{aligned}$$

(Quindi $\mathcal{E}$ è un sottoinsieme di $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$.)

- *Osservazione.* Se $\{x_n\}$ è regolare, la sua classe limite contiene un unico elemento: $\lim x_n$.

- *Esempi.*
  - $x_n = (-1)^n$.
  - $\{x_n\} = \{1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots\}$.
  - $x_n = \sin \frac{n\pi}{6}$.
  - Una successione con $\mathcal{E} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
  - Una successione con $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{R}}$ (idea: ordinare $\mathbb{Q}$ in una successione $\{q_n\}$ *[perché è possibile?]*, definire $\{x_n\} = \{q_1, q_1, q_2, q_1, q_2, q_3, q_1, q_2, q_3, q_4, \dots\}$).

- **Teorema (proprietà di classe limite).**
  Siano $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\{x_n\})$.
  (i) $\mathcal{E}$ è un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$ [ciò verrà dimostrato prossimamente].
  (ii) $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$.
  (iii) In $\overline{\mathbb{R}}$ esistono $\max \mathcal{E}$ e $\min \mathcal{E}$, e vengono chiamati, rispettivamente, *limite superiore* (o *massimo limite*) e *limite inferiore* (o *minimo limite*) di $\{x_n\}$. Notazione:

$$\max \mathcal{E} = \limsup_{n\to+\infty} x_n = \overline{\lim}\, x_n \,,$$
$$\min \mathcal{E} = \liminf_{n\to+\infty} x_n = \underline{\lim}\, x_n \,.$$

- Definizione di *asintotico* ($x_n \sim y_n$) e di *o piccolo* ($x_n = o(y_n)$).

- *Osservazione molto utile:* $x_n \sim y_n \Leftrightarrow x_n = y_n + o(y_n)$.
  Ora è possibile riscrivere tutti i limiti notevoli usando $\sim$ oppure *o piccolo.*

- *La relazione "asintotico" ($\sim$) "si comporta bene":*
  - *nei prodotti* (quando sostituiamo uno dei fattori con un suo asintotico);
  - *nei rapporti* (sostituendo il numeratore e/o denominatore);
  - *nelle potenze* ($x_n \sim x'_n \Rightarrow (x_n)^\alpha \sim (x'_n)^\alpha$);
  - *nei logaritmi i cui argomenti tendono a* $+\infty$ *o* 0 (sostituendo l'argomento del logaritmo).

  Attenzione!!! L' "asintotico" non può essere usato nelle somme/differenze, né nelle esponenziali:
  se $x_n \sim x'_n$, non possiamo concludere che $x_n \pm y_n \sim x'_n \pm y_n$ né che $e^{x_n} \sim e^{x'_n}$.

09/11/2015 [2 ore: n. 26,27]

- **Teorema.** *Sia* $\{x_n\}$ *una successione in* $\mathbb{R}$.
  1. **(teorema di Heine–Borel)** *Se* $\{x_n\}$ *è limitata allora ammette una sottosuccessione convergente.*
  2. *Se* $\{x_n\}$ *è illimitata (superiormente/inferiormente) allora ammette una sottosuccessione divergente (a* $+\infty/-\infty$*).*

  In particolare, la classe limite $\mathcal{E}(\{x_n\})$ *non è mai vuota.*

  Dimostrazione (idea). La seconda parte è facile: se $\{x_n\}$ è illimitata superiormente, è possibile scegliere induttivamente indici $n_1 < n_2 < \ldots$ in modo che $x_{n_k} > k$ per ogni k. Per il teorema di confronto, $x_{n_k} \to +\infty$.

  Per dimostrare la prima parte, il teorema di Heine–Borel, possiamo utilizzare il "metodo di bisezione". Supponiamo che $\{x_n\} \subset [a, b]$. Dividiamo $[a, b]$ in due "metà" della stessa lunghezza; almeno una di esse, che denotiamo con $[a_1, b_1]$, contiene x_n per infiniti n. Poi, dividiamo $[a_1, b_1]$ in due "metà" della stessa lunghezza; almeno una di esse, che denotiamo con $[a_2, b_2]$, contiene x_n per infiniti n. E così via. Otteniamo una successione di intervalli inscatolati

  $$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots .$$

  Osserviamo che, per ogni k, l'intervallo $[a_k, b_k]$ contiene x_n per infiniti n, inoltre $b_k - a_k = 2^{-k}(b - a) \to 0$. Per il *Principio di intervalli compatti inscatolati*,

  $$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k] = \{p\}\,, \quad a_k \to p\,, \quad b_k \to p\,.$$

  Possiamo scegliere (in $\mathbb{N}$) indici $n_1 < n_2 < \cdots$ in modo che $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ per ogni k. Per il teorema "dei due carabinieri", $x_{n_k} \to p$ per $k \to +\infty$. *[q.e.d.]*

- *Esempio.* $x_n = 9^{(-1)^n} + \log(n - 1) - \log(n + 1)$ per $n \geq 2$.
  Determinare: $\sup\limits_{n\geq 2} x_n$, $\inf\limits_{n\geq 2} x_n$, $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$.

  (Risposte: $\inf x_n = \min x_n = x_3 = (1/9) - \log 2$, $\sup x_n = \limsup x_n = 9$, $\liminf x_n = 1/9$.)

- *Lemma.* Sia $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha \in \mathbb{R}$. Allora:
  (i) $\{x_n\}$ è limitata superiormente;
  (ii) $\forall\varepsilon > 0$: $x_n < \alpha + \varepsilon$ definitivamente;
  (iii) $\forall\varepsilon > 0$: $x_n > \alpha - \varepsilon$ per infiniti n.

- **Teorema.** In uno spazio metrico X, un punto $p \in X$ è un punto di accumulazione di un insieme A se e solo se esiste una successione in $A \setminus \{p\}$ convergente (in X) a p.

- **Teorema.** Sia A un insieme non vuoto in uno spazio metrico X. Allora le seguenti sono equivalenti:
  (i) A è chiuso;
  (ii) se $A \ni x_n \to p \in X$ allora $p \in A$.

- **Esercizio per voi(!).** Siano (X, d) uno spazio metrico, e $A \subset X$. Dimostrare le seguenti due affermazioni.
  ◦ Se (A, d) è completo allora A è chiuso in X.
  ◦ Se (X, d) è completo e A è chiuso allora (A, d) è completo.

- *Esercizio.* Al variare del parametro $b \in (-\infty, \frac{1}{4})$ calcolare, se esiste, il limite della successione

$$x_n = (\sqrt[4]{n} + n^b)^{2015} - (\sqrt[4]{n} - n^b)^{2015}.$$

  Breve svolgimento.
  Raccogliendo il secondo termine, si ha

$$\begin{aligned} x_n &= (n^{1/4} - n^b)^{2015} \left[\left(\frac{n^{1/4} + n^b}{n^{1/4} + n^b} \right)^{2015} - 1 \right] \\ &= (n^{1/4} - n^b)^{2015} \left[\left(1 + \frac{2n^b}{n^{1/4} + n^b} \right)^{2015} - 1 \right]. \end{aligned}$$

  Utilizzando con attenzione le proprietà di "asintotico" e un limite notevole, otteniamo

$$\begin{aligned} x_n &\sim n^{2015/4} \cdot 2015 \cdot \frac{2n^b}{n^{1/4} + n^b} \sim 4030 \cdot n^{2015/4} \cdot \frac{n^b}{n^{1/4}} \\ &= 4030 \cdot n^{(1007/2)+b}. \end{aligned}$$

  Conclusione:
  ◦ se $b < -1007/2$ allora $x_n \to 0$;
  ◦ se $b = -1007/2$ allora $x_n \to 4030$;
  ◦ se $-1007/2 < b < 1/4$ allora $x_n \to +\infty$.

11/11/2015 [2 ore: n. 28,29]

Alcuni esercizi prima del "compitino"

- $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n^b}-n\right)$ (al variare di $b<2$)

- Rappresentare graficamente la funzione $f(x)=\big|[-|x|]\big|$, dove $[\cdot]$ denota la parte intera.

- Per ogni intero $n\geq 2$ sia
$$E_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1-\tfrac{1}{n},\, y>\tfrac{1}{n}\right\}\cup\left\{(2,-\tfrac{1}{n})\right\},$$
e sia $C=\bigcup_{n=2}^{+\infty}E_n$. Determinare gli insiemi: $C,\ C^\circ,\ C'$.

- Sia
$$f(x)=\begin{cases}|x^2-4| & \text{se } x<0\\ 3^{-x} & \text{se } x\geq 0.\end{cases}$$
Determinare il più ampio intervallo contenente lo zero dove f è iniettiva.

- $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1+\cos\left(\pi\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}\right)}{\log^2(\cos\frac{1}{n})}$

- Sia
$$f(x)=\begin{cases}4-|x+3| & \text{se } x<0\\ 2+\log(x+1) & \text{se } x\geq 0.\end{cases}$$
Stabilire per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(a)$ ha cardinalità uguale a tre.

- Al variare di $a\in\mathbb{R}$, determinare il carattere della successione
$$x_n=a^n\cdot\frac{(-3)^n\log(2^n+1)-2^n n^6}{3^{n/2}\log(n^2+1)+5n}.$$

17/11/2015 [2 ore: n. 30,31]

Serie di numeri reali (serie numeriche)

- Data una successione $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, la *serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

può essere vista come un tentativo di calcolare la somma di infiniti termini

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

Definizione formale: la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è definita come la successione $\{A_k\}$ delle sue *somme parziali* (o *ridotte*), dove $A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Il *comportamento* della serie è poi definito come il comportamento della successione $\{A_k\}$.

- *Esempi.* $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ diverge alla somma $+\infty$.
Una *serie geometrica* $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge se e solo se $|q| < 1$; in tal caso la somma della serie vale $\frac{1}{1-q}$.

- *Esempi.*
  (i) $\sum_1^{+\infty} (-1)^n$ è irregolare.
  (ii) La *serie di Mengoli* $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.
  (iii) Vedremo più avanti che:
  $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n}$ (la *serie armonica*) diverge, mentre $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

- *Osservazioni.*
  (i) Per ogni costante $c \neq 0$, le serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ e $\sum_1^{+\infty} (c \cdot a_n)$ hanno lo stesso comportamento.
  (ii) Per ogni $s \in \mathbb{Z}$, le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=s}^{+\infty} a_n$ hanno lo stesso comportamento.
  Corollario. Se $a_n = b_n$ definitivamente, allora le serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ e $\sum_1^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento.

- **Teorema (condizione necessaria).** Il termine generale di una serie convergente tende necessariamente a 0.

- *Esempio.* La serie $\sum_1^{+\infty} n^2 (3^{1/n} - 1) \log(\frac{n+1}{n})$ non converge.

- *Criterio di Cauchy per le serie.*

- Convergenza assoluta.
Teorema (cond. sufficiente). Se una serie converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.

- *Corollario.* Per una serie $\sum_1^{+\infty} a_n$, valgono le seguenti implicazioni:

  $$\sum_1^{+\infty} |a_n| \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_1^{+\infty} a_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0\,,$$

  ma le implicazioni inverse sono false (v. la serie $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ e quella armonica).

Serie a termini non negativi

- Consideriamo una serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni n (o almeno definitivamente).

  Grazie alla monotonia della successione delle somme parziali, tale serie non può essere irregolare e le seguenti sono equivalenti:
  (i) $\sum_1^{+\infty} a_n$ converge;
  (ii) $\sum_1^{+\infty} a_n$ non diverge;
  (iii) la successione delle somme parziali della $\sum_1^{+\infty} a_n$ è superiormente limitata.

- **TEOREMA.** Supponiamo che $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0, +\infty)$.
  1. *(criterio del confronto).* Sia $a_n \leq b_n$ almeno definitivamente. Se $\sum_1^{+\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_1^{+\infty} a_n$ converge.
  (E quindi, se $\sum_1^{+\infty} a_n$ diverge allora $\sum_1^{+\infty} b_n$ diverge.)
  2. *(confronto asintotico).* Sia $a_n \sim b_n$ (per $n \to +\infty$). Allora le due serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ e $\sum_1^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento.

18/11/2015 [2 ore: n. 32,33]

- *Esempio.* Per ogni $\alpha \geq 2$ la serie $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
  (Per $\alpha = 2$ si fa il confronto asintotico con la serie di Mengoli, e per $\alpha > 2$ il confronto con il caso precedente.)

- **Teorema (criteri della radice e del rapporto).** Sia $a_n \geq 0$ per ogni n (o almeno definitivamente). Supponiamo che esista

  $$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} =: \ell \quad \text{oppure} \quad \lim \sqrt[n]{a_n} =: \ell \quad (0 \leq \ell \leq +\infty).$$

  (i) Se $\ell < 1$ allora la serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ converge.
  (ii) Se $\ell > 1$ allora $a_n \to +\infty$ e quindi la serie diverge.
  (Sul caso $\ell = 1$ il criterio non dice niente.)

- **Esercizio per voi.** Determinare il comportamento della serie $\sum_1^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

- *Esempio.* $\sum_4^{+\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

- **Teorema (criterio di condensazione).** Sia $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ per ogni n (o almeno definitivamente). Allora le due serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$$
hanno lo stesso comportamento.

- **Due serie notevoli:**
  - $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ converge se e solo se $a > 1$;
  - $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a \log^b n}$ converge se e solo se $a > 1, b \in \mathbb{R}$ oppure $a = 1, b > 1$.

- **Teorema (criterio di Leibniz).** Consideriamo la serie a termini di segno alterno
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n \tag{3}$$
con $b_n \geq 0$ per ogni n (o almeno definitivamente). Se $b_n \searrow 0$ (cioè, $b_n \geq b_{n+1}$ per ogni n, e $b_n \to 0$) allora la serie (3) converge.

- *Esempio.* $\sum_1^{+\infty} \frac{2n}{n^2+1}(a^2-1)^n$.
(In realtà, è una serie del tipo $\sum_1^{+\infty} \frac{2n}{n^2+1} b^n$, non necessariamente a termini di segno costante.)

23/11/2015 [2 ore: n. 34,35]

- *Serie somma.* Consideriamo una serie del tipo
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + y_n)\,.$$
Se le due serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$$
sono regolari e la somma delle loro somme esiste (in $\overline{\mathbb{R}}$), allora anche la serie iniziale è regolare con
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\,.$$

- *Commenti sui riordinamenti.* In generale, il comportamento di una serie dipende dall'ordine in cui sono messi i suoi termini. Ad esempio, la serie
$$-1+1-1+1-1+\dots$$
è irregolare, mentre il suo "riordinamento"
$$1+1-1+1+1-1+1+1-1+\dots$$
è divergente a $+\infty$. (Ma in questo caso non esistono riordinamenti convergenti.)
Ecco alcuni fatti interessanti.
  - *Il comportamento di una serie* <u>*a termini non negativi*</u> *e la sua somma non dipendono dal riordinamento.*
  - *Se una serie* <u>*converge assolutamente*</u>*, allora ogni suo riordinamento converge e la somma è sempre la stessa.*
  - (Teorema di Riemann). *Se una serie* <u>*converge*</u> <u>*ma non*</u> <u>*converge assolutamente*</u>*, allora con un opportuno riordinamento è possibile ottenere un qualsiasi comportamento e una qualsiasi somma.*

Limiti di funzioni

- *Idea base per la definizione di* $\lim_{x\to p} f(x) = \ell$ *:*
$\forall V$ intorno di ℓ si ha che "$f(x) \in V$ definitivamente per $x \to p$ ",
dove l'espressione virgolettata significa:
$\exists U$ intorno di p tale che per ogni $x \in U \setminus \{p\}$ si abbia $f(x) \in V$.

- **Definizione.** Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $E \subset X_1$, $f\colon E \to X_2$, $p \in E'$, $\ell \in X_2$. Diciamo che
$$\lim_{x\to p} f(x) = \ell$$
se
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\, \forall x \in \big(B(p,\delta) \setminus \{p\}\big) \cap E\ :\quad f(x) \in B(\ell, \varepsilon)\,,$$
ovvero
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\, \forall x \in E \text{ con } 0 < d_1(x,p) < \delta:\ \ d_2(f(x), \ell) < \varepsilon\,.$$

- **Teorema (caratterizzazione successionale).** Siano, come sopra, $f\colon X_1 \supset E \to X_2$, $p \in E'$, $\ell \in X_2$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (i) $\lim_{x\to p} f(x) = \ell$;
  (ii) per ogni successione $\{x_n\} \subset E \setminus \{p\}$ tale che $x_n \to p$ si ha che $f(x_n) \to \ell$.

- *Esempi.*
  (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
  (ii) $\log x \sim x - 1$ per $x \to 1$.
  (iii) $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$, mentre $x = o(x^2)$ per $x \to -\infty$.
  (iv) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ non esiste, mentre i due limiti unilaterali $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x}$ esistono e valgono $\pm\infty$.

- *Ulteriori varianti della definizione di limite.*
  - Definizione di $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$ dove $f\colon \mathbb{R} \supset E \to X$, $\inf E = -\infty$, $\ell \in X$.
  - Definizione di $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ dove $f\colon X \supset E \to \mathbb{R}$, $p \in E'$.
  - Definizione di $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2$ dove $f\colon \mathbb{R} \supset E \to \mathbb{R}$, $-1 \in (E \cap [-1, +\infty))'$.
  - Altri varianti, con esempi.

- **Proprietà di limiti di funzioni.** Siano (X, d) uno spazio metrico, $f\colon X \supset E \to \mathbb{R}$, $p \in E'$. Per semplicità di scrittura useremo la seguente notazione:

$$B_E^\bullet(p, r) = \big(B(p, r) \setminus \{p\}\big) \cap E \qquad (r > 0).$$

  (a) *(Locale limitatezza).* Se $\lim_{x\to p} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ allora f è limitata in qualche $B_E^\bullet(p, r)$.
  [Infatti, per la definizione di limite esiste $r > 0$ tale che $f(x) \in (\ell - 1, \ell + 1)$ in $B_E^\bullet(p, r)$.]

  (b) *(Permanenza del segno).* Supponiamo che $\lim_{x\to p} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \in \overline{R}$.
  (b1) Se $\ell > \alpha$ allora $f(x) > \alpha$ in qualche $B_E^\bullet(p, r)$.
  (b2) Se $f(x) \geq \alpha$ in qualche $B_E^\bullet(p, r)$ allora $\ell \geq \alpha$.
  [*Dimostrazione – ESERCIZIO PER VOI!*]

  (c) *(Teorema del confronto ["dei 3 carabinieri"])* – segue dalla caratterizzazione succesionale.

  (d) *(Operazioni algebriche e limiti)* – idem.

  (e) *(Limiti e le funzioni elementari)* – idem.

  (f) *(Limiti notevoli)* – idem.

24/11/2015 [2 ore: n. 36,37]

- Ripasso – *struttura della definizione di limite* (caso particolare di $E = X_1 \setminus \{p\}$):
siano X_1, X_2 due spazi metrici, $p \in X_1$, $\ell \in X_2$, $f\colon X_1 \setminus \{p\} \to X_2$; allora
$$\lim_{x\to p} f(x) = \ell$$
equivale a dire che:
$$\forall\, V \text{ intorno di } \ell\,,\ \ \exists\, U \text{ intorno di } p\,,\ \ \forall\, x \in U \setminus \{p\}\ :\quad f(x) \in V\,.$$

- Anche per i limiti di funzioni vale l'*unicità di limite* – ciò segue immediatamente dalla caratterizzazione successionale (o, in alternativa, utilizzando la proprietà di Hausdorff come nel caso di successioni) [esercizio!].

- *Commenti su "infiniti".*
  (i) Siano $a, b > 1$, $p, q > 0$. Allora
$$\log_b^q x \ll x^p \ll a^x \ll [x]! \ll x^x \quad \text{per } x \to +\infty.$$
  (ii) Per $p, q > 0$ si ha
$$\lim_{x\to 0^+} x^p \cdot |\log_b x|^q = 0\,.$$

- **Asintoti.**
La retta (verticale) $x = x_0$ è un *asintoto verticale* al grafico di f se vale almeno una delle seguenti:
$$\lim_{x\to x_0^+} |f(x)| = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to x_0^-} |f(x)| = +\infty\,.$$
Dati $m, q \in \mathbb{R}$, la retta (non verticale) di equazione $y = mx + q$ è un *asintoto* (*verticale* se $m = 0$, *obliquo* altrimenti) al grafico di f per $x \to +\infty$ [per $x \to -\infty$] se
$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(f(x) - mx - q\bigr) = 0 \quad \bigl[\lim_{x\to-\infty}\bigl(f(x) - mx - q\bigr) = 0\bigr]\,.$$
Teorema (calcolo di asintoti non verticali).
Dati $m, q \in \mathbb{R}$, le seguenti due affermazioni sono equivalenti:
  (i) $y = mx + q$ è un asintoto al grafico di f per $x \to +\infty$;
  (ii) $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x\to+\infty}\bigl(f(x) - mx\bigr)$.

- *Esempio.* Calcolare l'eventuale asintoto per $x \to -\infty$ al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{9x^2 + 4x - 7}$.

Insiemi compatti in spazi metrici
(Argomento presentato in modo diverso, ma equivalente, rispetto al libro di Soardi – si veda il *file* sulla mia pagina web.)

- Definizione di insieme compatto (tramite successioni).
- Esempi di insiemi compatti; esempi di insiemi non compatti.
- Condizione necessaria per la compattezza.
- Condizione necessaria e sufficiente per la compattezza in $\mathbb{R}^d$ (*teorema di Heine–Borel*).
- *Teorema di Bolzano–Weierstrass:* ogni insieme infinito e limitato in $\mathbb{R}^d$ ha almeno un punto di accumulazione.
- **Esercizio per voi.** Siano $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ infiniti insiemi tutti compatti e non vuoti in uno spazio metrico (X, d). Dimostrare che
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \neq \emptyset \, .$$
(Suggerimento: per ogni n fissare $x_n \in E_n$, ottenendo così una successione in E_1.)

30/11/2015 [2 ore: n. 38,39]

- *Definizione.* Sia E un insieme in uno spazio metrico.
Una *copertura* [*aperta*] di E è una qualsiasi famiglia $\mathcal{A} := \{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ di insiemi [aperti] tale che $E \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$.
Una sottofamiglia $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ è una *sottocopertura* di $\mathcal{A}$ se anch'essa è una copertura di E.

- **Teorema (caratterizzazioni di compattezza).** *Sia E un insieme non vuoto in uno spazio metrico. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
  (i) *E è compatto* [secondo la nostra definizione]*;*
  (ii) *ogni copertura <u>aperta</u> di E ammette una sottocopertura <u>finita</u>* [questa è la definizione di compattezza utilizzata nel libro di Soardi]*;*
  (iii) *ogni sottoinsieme <u>infinito</u> di E ha almeno un punto di accumulazione <u>in E</u>.*

Continuità

- In quanto segue, (X_i, d_i) sono spazi metrici, $E \subset X_1$ è un insieme, $f\colon E \to X_2$, $p \in E$.

- Definizione di *continuità* di f nel punto p.

- *Osservazioni.*
  (i) Se p è un punto isolato di E allora f è automaticamente continua in p.
  (ii) Supponiamo invece che $p \in E'$. Allora le seguenti sono equivalenti:
    (a) f è continua in p;
    (b) $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$;
    (c) se $E \ni x_n \to p$ allora $f(x_n) \to f(p)$.
  (iii) Siccome la (c) vale sempre se $p \notin E'$ *[perché?]*, l'equivalenza $(a) \Leftrightarrow (c)$ è vera per ogni $p \in E$ (che sia isolato o meno).
  (iv) Osserviamo che il teorema su "limiti e funzioni elementari" in realtà dice che *ogni funzione elementare è continua in ogni punto del suo insieme di definizione.*

- *Esercizio importante.* Supponiamo che $f\colon X_1 \supset E \to X_2$, $g\colon X_2 \supset D \to X_3$, $f(E) \subset D$. Se f è continua in un punto $p \in E$ e g è continua nel punto $f(p)$, allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in p.

- *Definizione (continuità globale).* $f\colon E \subset X_1 \to X_2$ è continua (in E, oppure su E) se f è continua in ogni punto di E.

- **Teorema (caratterizzazioni di continuità).** Per una funzione $f\colon X_1 \to X_2$ (cioè, $E = X_1$), le seguenti sono equivalenti:
  (i) f è continua;
  (ii) la controimmagine $f^{-1}(A)$ di ogni aperto $A \subset X_2$ è un insieme aperto;
  (iii) la controimmagine $f^{-1}(C)$ di ogni chiuso $C \subset X_2$ è un insieme chiuso.

- **Teorema (Weierstrass).** Se $f\colon X_1 \supset C \to X_2$ è continua e C è compatto, allora l'insieme immaggine $f(C)$ è compatto.

  Idea della dimostrazione. Sia $\{y_n\} \subset f(C)$. Esiste $\{x_n\} \subset C$ tale che $f(x_n) = y_n$ per ogni n. Esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a qualche $p \in C$. Allora $y_{n_k} \to f(p) \in f(C)$. *[q.e.d.]*

- *Lemma.* Se $E \subset \mathbb{R}$ è un insieme chiuso e limitato (equivalentemente, se E è compatto) allora esistono $\max E$ e $\min E$.

  (*Idea della dim.:* se $s := \sup E$ non appartenesse ad E, esisterebbe (perché E è chiuso!) un $\varepsilon > 0$ tale che $E \cap (s - \varepsilon, s + \varepsilon) = \emptyset$; ma in tal caso *[fatevi un disegnino!]* $s - \varepsilon$ sarebbe un maggiorante per E, contraddicendo la definizione di estremo superiore.)

- **Corollario (Teorema di Weierstrass).** Siano (X, d) uno spazio metrico compatto (non vuoto) e $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono $\max f(X)$ e $\min f(X)$. In particolare, f è limitata.

  Dimostrazione. Segue dal teorema precedente e dal Lemma.

- *Esempio di applicazione.* Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che entrambi i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ esistano e valgano $+\infty$. Allora f assume il suo minimo; in particolare, f è limitata inferiormente.

  (*Idea della dim.*. Denotiamo $i := \inf f(\mathbb{R})$ $(< +\infty)$ e fissiamo un $m \in \mathbb{R}$ tale che $m > i$. Esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tali che $f(x) > m$ in $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. Ne segue facilmente che $i = \inf f([a, b]) = \max f([a, b])$ [l'ultima uguaglianza viene dal teorema di Weierstrass], e quindi $i = f(x)$ per qualche $x \in [a, b]$.)

- **Teorema (degli zeri).** Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $p \in (a, b)$ tale che $f(p) = 0$.

  Dimostrazione del teorema degli zeri.
  Supponiamo, ad es., che $f(a) < 0 < f(b)$. Applicheremo il metodo di bisezione. Consideriamo il punto medio di $[a, b]$. Se f vi si annulla, abbiamo finito. Se no, denotiamo con $[a_1, b_1]$ quella delle due metà di $[a, b]$ per cui $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Ripetiamo lo stesso con l'intervallo $[a_1, b_1]$, ottenendo $[a_2, b_2]$ come quella delle due metà di $[a_1, b_1]$ con valori di f agli estremi di segno discorde. E così via. Se a nessun passo il punto medio è uno zero per f, otteniamo così una successione di intervalli inscatolati

  $$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$$

  le cui lunghezze tendono a 0. Per il *Principio di intervalli chiusi inscatolati*,

  $$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k] = \{p\}\,, \quad a_k \to p\,, \quad b_k \to p\,.$$

  Allora $0 > f(a_k) \to f(p)$, $0 < f(a_k) \to f(p)$ (continuità!). Siccome $f(p) \leq 0$, $f(p) \geq 0$ (permanenza di segno!), si ha $f(p) = 0$. *[q.e.d.]*

- **Corollario (Teorema dei valori intermedi, di Darboux).** Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \neq f(b)$. Allora f assume in (a,b) tutti i valori strettamente compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

  Idea della dimostrazione. Se v è un numero reale strettamente compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, applicare il teorema precedente alla funzione $g(x) = f(x) - v$. *[q.e.d.]*

02/12/2015 [2 ore: n. 40,41]

- Ripasso. Commento sulla continuità: dire che "f è continua in $[a,b]$" non riguarda gli eventuali valori di f nei punti al di fuori di $[a,b]$, ma significa che f è "continua da destra" in a, "continua da sinistra" in b, e continua (da entrambi i lati) nei punti di (a,b).

- **Corollario (riformulazione del Teorema di Darboux).**
  "L'immagine continua di un intervallo è sempre un intervallo."
  Più precisamente, se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora $J := f(I)$ è un intervallo.

- *Corollario.* Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora $f([a,b]) = [m, M]$ con opportuni $-\infty < m \leq M < +\infty$.

- *Esempio.* L'immagine continua di un intervallo aperto può essere un intervallo non aperto: $f(x) = x^2$, $I = (-1,1)$.

- **Esercizio per voi.** Se $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è continua e strettamente monotona, allora $f((a,b))$ è un intervallo aperto.

- *Corollario.* Supponiamo che (a,b) sia un qualsiasi intervallo aperto non vuoto ed $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua tale che i due limiti
  $$\lim_{x\to a^+} f(x)\ , \qquad \lim_{x\to b^-} f(x)$$
  siano infiniti di segno opposto. Allora f è suriettiva.

- *Classificazione delle discontinuità.* Supponiamo che f sia una funzione (a valori reali) definita almeno in un "intorno bucato" di un punto x_0 : $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$. Per semplicità denotiamo
  $$L_\pm(x_0) := \lim_{x\to(x_0)\pm} f(x)\,.$$

  Possono verificarsi i seguenti 4 casi:

(a) $L_{\pm}(x_0)$ esistono ed entrambi sono uguali a $f(x_0)$; in questo caso x_0 è un punto di continuità.
(b) $L_{\pm}(x_0)$ esistono finiti, sono uguali tra loro ma diversi da $f(x_0)$ (che include anche il caso in cui f non è definita in x_0); in questo caso x_0 è un punto di *discontinuità eliminabile.*
(c) $L_{\pm}(x_0)$ esistono finiti ma sono diversi tra loro; in questo caso x_0 è un punto di *discontinuità di I specie* ("salto finito").
(d) In tutti gli altri casi (cioè quando almeno uno dei due limiti è infinito o non esiste), x_0 è un punto di *discontinuità di II specie.*

- Esempi di vari tipi di discontinuità: $|\mathrm{sgn}(x)|$, $\frac{\sin x}{x}$, $\mathrm{sgn}(x)$, $\arctan \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}$, $e^{1/x}$, $\sin \frac{1}{x}$.

- La *funzione di Dirichlet*,
$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$
presenta in tutti i punti una discontinuità di II specie.

- **Esercizio per voi.** [non dato a lezione]
Classificare le discontinuità della funzione
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| > 1 \text{ oppure } x = \frac{1}{n} \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- *Definizione di vari tipi di monotonia di f su un intervallo*: non decrescente (o crescente in senso lato), strettamente crescente, non crescente (o decrescente in senso lato), strettamente decrescente.

- **Teorema.** Siano (a, b) un qualsiasi intervallo aperto non vuoto e $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona non decrescente. Allora
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)\,.$$

- **Teorema.** Siano (a, b) un qualsiasi intervallo aperto non vuoto e $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Denotiamo
$$D_f = \{x \in (a, b) : f \text{ non è continua in } x\}.$$
(i) Ogni $x \in D_f$ è un punto di discontinuità di I specie.
(ii) L'insieme D_f è al più numerabile. (In particolare, tra ogni due punti distinti di (a, b) vi è almeno un pnto di continiutà di f.)

- **Teorema (continuità dell'inversa).** Sia f una funzione continua in un intervallo I, e denotiamo $J = f(I)$.
  (i) f è iniettiva se e solo se f è strettamente monotona.
  (ii) Se f è strettamente monotona allora $f^{-1}\colon J \to I$ è continua.

09/12/2015 [2 ore: n. 42,43]

Calcolo differenziale

- Definizione di:
  - rapporto incrementale,
  - funzione derivabile in un punto x_0,
  - derivata in x_0,
  - retta tangente,
  - derivabilità da destra [sinistra], derivata destra [sinistra],
  - derivabilità in (a, b),
  - derivabilità in $[a, b]$.

- *Significato di* $f'(x_0)$: dal punto di vista geometrico, è il coeff. angolare della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0; da punto di vista fisico, è la velocità istantanea di cambiamento della quantità f.

- *Lemma.* Per $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ e $m \in \mathbb{R}$, le seguenti sono equivalenti:
  (a) f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = m$;
  (b) $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$;
  (b') $f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + o(h)$ per $h \to 0$.

- Continuità in x_0 come *condizione necessaria* per la derivabilità in x_0.

- Continuità non implica la derivabilità – 3 esempi:
  $|x|$; $\sqrt[3]{x}$; $x \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, 0 per $x = 0$.

- Derivata di multiplo, somma, prodotto, rapporto.

- **Teorema (derivata di funzioni composte).** Siano I, J due intervalli, $f\colon I \to J$, $g\colon J \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in I$ e se g è derivabile nel punto corrispondente $y_0 := f(x_0)$ $(\in J)$, allora anche la funzione composta $h := g \circ f$ è derivabile in x_0 con
$$h'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)\,.$$
In altre parole, nel punto x_0 vale la formula
$$\big[g(f(x))\big]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)\,.$$
Traccia della dimostrazione. Usando la formulazione successionale di limite, vogliamo dimostrare che, per ogni successione $\{x_n\} \subset I$ tale che $x_0 \neq x_n \to x_0$,

(4)
$$r_n := \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} \to g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Notiamo che, siccome f è continua in x_0 *[perché?]*, $f(x_n) \to f(x_0)$. Ora suddividiamo gli indici in due insiemi:
$$B = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) - f(x_0) \neq 0\},$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) - f(x_0) = 0\},$$
e consideriamo i seguenti tre casi possibili.
Caso 1: C è finito, cioè, gli indici stanno definitivamente in B. In questo caso possiamo moltiplicare e dividere il rapporto incrementale r_n per $f(x_n) - f(x_0)$ e ottenere facilmente la (4).
Caso 2: B è finito, cioè, gli indici stanno definitivamente in C. In questo caso $f'(x_0) = 0$ e $r_n = 0$ definitivamente, e quindi la (4) è soddisfatta.
Caso 3: entrambi B, C sono infiniti. In questo caso suddividiamo la succesisone $\{x_n\}$ in due sottosuccessioni $\{x_n\}_{n\in B}$ e $\{x_n\}_{n\in C}$ alle quali possiamo applicare i due casi precedenti.

14/12/2015 [2 ore: n. 44,45]

- *Teorema (derivabilità delle funzioni elementari).* Ogni funzione elementare è derivabile (almeno) in ogni punto *interno* del suo insieme di definizione.

- *Esempi.* Calcolare la derivata (dove esiste) di ciascuna delle seguenti funzioni:
  (i) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2+1}\,;$
  (ii) $f(x) = \tan^3 x\,,\ \ g(x) = \tan(x^3)\,;$

(iii) *(esempio interessante)* $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$ (f è derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(0) = 0$, ma i limiti $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x)$ non esistono; in particolare, f' non è continua in 0).

- **Teorema (derivata dell'inversa).** Dati $f\colon I \to \mathbb{R}$ (dove I è un intervallo) e un punto $x_0 \in I$, supponiamo che
  (a) f sia continua e strettamente monotona in I, e
  (b) f sia derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$.
  Denotiamo $J = f(I)$ (è un intervallo!). Allora f è derivabile nel punto corrispondente $y_0 = f(x_0) \in J$ con
  $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

- *Esempio.* Sapendo che $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ in ogni punto in cui $\cos x \neq 0$, calcolare (dove esiste) la derivata di: $\arctan x$.
  (La funzione $\arctan x$ è la funzione inversa della funzione $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \tan t$. Siccome f è continua e strettamente crescente in $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e ivi derivabile con derivata non nulla, il teorema ci assicura che anche la sua inversa, $\arctan x$, è derivabile in $J = f(I) = \mathbb{R}$ e vale la formula:
  $$(\arctan x)' = \frac{1}{f'(\arctan x)} = \cos^2(\arctan x) = \cdots = \frac{1}{x^2+1}\,.\quad)$$

- **Esercizio per voi.** Procedendo come nell'esempio precedente, determinare la derivata della funzione $\log x$, sapendo che $(e^x)' = e^x$ in $\mathbb{R}$.

- *Alcuni tipii di non derivabilità:*
  - punto angoloso (esempi: $|x|$ e $\max\{\sqrt[3]{x}\,, 0\}$, entrambe in 0);
  - punto a tangente verticale (esempio: $\sqrt[3]{x}$ in 0);
  - punto di cuspide (esempio: $\sqrt[3]{x^2}$ in 0).

- **Estremanti:** estremanti assoluti (globali), estremanti relativi (locali); estremanti stretti.
  Esempi.

- *Teorema di Fermat* – condizione necessaria per estremanti.

- *Punti sospetti di essere estremanti di $f\colon I \to \mathbb{R}$:*
  - punti di derivabilità in I° con derivata nulla;
  - punti di non derivabilità in I°;
  - gli eventuali estremi di I (appartenenti ad I).

- **Convenzione.** Diciamo che *f soddisfa l'ipotesi (H) in I* se: f è continua in I e derivabile in I°.

- Teoremi di **Rolle** e di **Lagrange** *(="teorema dell'incremento finito").* (In entrambi, l'ipotesi base è (H).)

16/12/2015 [2 ore: n. 46,47]

- Teorema di **Cauchy** (non dimostrato).
  Commento: il teorema di Lagrange può essere visto come un caso particolare del teorema di Cauchy, con $g(x) = x$.

- **Teorema (derivata e monotonia).** Siano I un intervallo non degenere e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfi (H).
  (i) $f' \geq 0$ in $I^\circ \;\Leftrightarrow\; f$ è non decrescente in I.
  (ii) $f' > 0$ in $I^\circ \;\Rightarrow\; (\not\Leftarrow)\; f$ è strettamente crescente in I.
  (iii) $f' = 0$ in $I^\circ \;\Leftrightarrow\; f$ è costante in I.

- *Teorema (derivata come limite di derivate).* Supponiamo che f soddisfi la condizione (H) in $[a, b)$ e che esista (finito o infinito) il limite
$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = \ell\,.$$
  Allora $f'_+(a) = \ell$.

  Commento. L'esempio (iii) della volta scorsa mostra che se il limite delle derivate non esiste non possoamo concludere che non esista $f'_+(a)$!

- *Corollario.* Sia f una funzione derivabile in un intervallo aperto I. Allora ogni punto di discontinuità di f' è di II specie.

- *Curiosità.* E' noto che, sotto le ipotesi del Corollario, f' *ha la proprietà di Darboux:* per ogni intervallo $J \subset I$ l'insieme immagine $f'(J)$ è un intervallo.

- *Esempio.* La funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ non è derivata di alcuna funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- La *regola di de l'Hopital.*
  Commenti sull'uso: devo calcolare $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$; se è del tipo "0/0" oppure "∞/∞", studio il limite $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$; se quest'ultimo esiste (finito o infinito) allora è uguale al limite di partenza; se invece non esiste, non posso concludere che non esista il limite di partenza (si veda, ad esempio, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$)!

Derivate successive, sviluppi di Taylor

- Definizione di:
  (a) f è n volte derivabile in I;
  (b) f è n volte derivabile in x_0.

- *Definizione.* Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ e $n \in \mathbb{N}$. Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0, consideriamo il polinomio
  $$P_{n,f}(x) = P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\,.$$
  Esso viene detto *polinomio di Taylor di "grado n"* (in realtà, $\leq n$) *di f, centrato in x_0.*

- *Proprietà di P_n.*
  (a) $(P_{n,f})' = P_{n-1,f'}$.
  (b) $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$.
  (c) P_n è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che soddisfi (b).

21/12/2015 [2 ore: n. 48,49]

- *Terminologia.* Bisogna distinguere tra *polinomio* di Taylor (definito sopra) e *sviluppo* di Taylor. Quest'ultimo è un'uguaglianza tipo
  $$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$
  dove $r_n(x)$ è il "resto", cioè l'errore che si commette sostituendo f con P_n.
  Gli sviluppi di Taylor centrati in $x_0 = 0$ vengono chiamati *sviluppi di McLaurin.*

- **Teorema (sviluppo di Taylor, resto di Peano).** Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in x_0. Allora

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Inoltre, P_n è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che soddisfi tale formula.

- *Esempio.* Scrivendo lo sviluppo di $f(x) = e^x$ nel punto $x_0 = 0$, otteniamo che, per $x \to 0$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$. Analogamente si ottengono gli sviluppi di altre funzioni elementari (v. gli sviluppi notevoli), che abbiamo utilizzato per il calcolo di limiti.

- *Convenzione.* Se $x < x_0$, allora con (x_0, x) e $[x_0, x]$ intendiamo rispettivamente (x, x_0) e $[x, x_0]$.

- **Teorema (sviluppo di Taylor, resto secondo Lagrange).** Siano I un intervallo non degenere, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Sia $x \in I \setminus \{x_0\}$ un punto fissato. Supponiamo che f sia:
(a) n volte derivabile in $[x_0, x]$,
(b) $n + 1$ volte derivabile in (x_0, x).
Allora esiste un punto $c \in (x_0, x)$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

- *Applicazione 1.* Per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \,.$$

In particolare,

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \,.$$

Allo stesso modo si verificano le seguenti formule validi per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x\,,$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x\,,$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathrm{Sh}(x)\,,$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{Ch}(x)\,.$$

- *Applicazione 2.* Il numero e è irrazionale.

  (*Curiosità.* E' noto che il numero e è un numero trascendente, cioè che non è radice di alcun polinomio a coefficienti interi.)

- **Punti di flesso.** Dati $f\colon I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I^\circ$, diciamo che x_0 è un *punto di flesso* per f se esiste la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0 (cioè, esiste $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$) e, in un opportuno intorno di x_0, "il grafico di f passa, nel punto di ascissa x_0, da un lato della retta tangente all'altro";
  più precisamente:
  se esiste $\delta > 0$ tale che, denotando con τ_{x_0} la funzione che descrive la retta tangente, $f > \tau_{x_0}$ in uno dei due intervalli $(x_0 - \delta, x_0)$ e $(x_0, x_0 + \delta)$, mentre $f < \tau_{x_0}$ nell'altro.

- Ogni punto in cui "cambia la convessità di f" è un punto di flesso.

- *Tipi di flessi.* Ci sono tre tipi di flesso.
  (i) *Flesso a tangente orizzontale* se $f'(x_0) = 0$ e, in un intorno di x_0, f ha segni opposti nei due "semi-intorni".
  Esempio: $f(x) = x^3$ in 0.
  (ii) *Flesso a tangente obliqua* se $f'(x_0) \neq 0$ è finita e:
  $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ in un semi-intorno di x_0, mentre $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ nel semi-intorno opposto.
  Esempio: $f(x) = \sin x$ in 0.
  (iii) *Flesso a tangente verticale* se $f'(x_0) = \pm\infty$.
  Esempio: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in 0.

- **Condizione sufficiente per estremante.**
Siano $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I^\circ$. Sappiamo già che una condizione necessaria affinché x_0 sia un estremante per f è che $f'(x_0) = 0$ (cioè, che x_0 sia un punto stazionario per f).
Supponiamo ora che, per qualche $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, si abbia:
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$
Allora:
  - *se n è dispari allora x_0 è un punto di flesso (in particolare, non è estremante per f);*
  - *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo (stretto);*
  - *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo (stretto).*

(Dimostrazione. Applicando la formula di Taylor con resto di Peano, otteniamo che, per $x \to x_0$,
$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.
Quindi, l'incremento $f(x) - f(x_0)$ e la funzione $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ hanno lo stesso segno in un opportuno intorno di x_0.)

- *Esempio.* Al variare di $a \in \mathbb{R}$, stabilire se 0 è estremante (e di che tipo) della funzione
$$f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + ax^2.$$

- *Commenti finali, brevissimi.*
  (i) Se f è dispari [pari] allora il suo polinomio di McLaurin (cioè, Taylor centrato in $x_0 = 0$) contiene solo potenze dispari [pari] (nel senso che i coefficienti delle altre potenze sono sempre nulli).
  (ii) Se conosco il polinomio di McLaurin centrato in x_0, di grado n, di una funzione f, allora conosco automaticamente anche le derivate di f in 0 fino all'ordine n incluso (dalla definizione di pol. Taylor). Ad esempio, sapendo che $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 - 9x^4$ per $x \to 0$, allora $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3 \cdot 3!$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = -9 \cdot 4!$.
  (iii) Le funzioni "concave verso l'alto" vengono chiamate *funzioni convesse*; le funzioni "concave verso il basso" vengono chiamate *funzioni concave.*

- *Non ho avuto il tempo di dire almeno:*
sia una funzione continua in I e due volte derivabile in I°. Allora:
  (i) se $f'' \geq 0$ in I° allora f è convessa in I;

(ii) se $f'' > 0$ in I° allora f è strettamente convessa in I (cioiè, f è convessa e il suo grafico non contiene segmenti non banali).
(Non sarà richiesto all'esame.)

11/01/2016 [2 ore: n. 50,51]

Numeri complessi, il campo complesso

- Definizione di un numero complesso: $z = x + yi$ dove $x, y \in \mathbb{R}$ e i è un simbolo detto "unità immaginaria".
  Denotiamo con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

- Per un numero complesso $z = x + yi$ definiamo:
  - la *parte reale* e la *parte immaginaria* di z: $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$ (anche la parte immaginaria è un numero reale!);
  - il *coniugato* di z: $\bar{z} = x - yi$;
  - il *modulo* di z: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (è un numero reale ≥ 0).

- *Osservazioni.*
  (i) $|\bar{z}| = |z|$.
  (ii) Ogni numero reale α può essere considerato come il numero complesso $\alpha + 0i$. In questo senso, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- *Le operazioni algebriche in* $\mathbb{C}$ si basano sulle operazioni algebriche in $\mathbb{R}$ e sulla regola
$$i^2 = -1.$$
  Esempi: somma, coniugato, prodotto, potenza intera, quoziente.

- *Osservazione importante:* $z\,\bar{z} = |z|^2$.

- **Teorema.** $\mathbb{C}$ è un campo di cui $\mathbb{R}$ è un sottocampo.

- *Una curiosità.* $\mathbb{C}$ è un campo *non ordinabile*, cioè, non esiste alcun ordinamento su $\mathbb{C}$ che lo renda un campo ordinato.

  (*Linea della dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che $\mathbb{C}$ sia un campo ordinato con una relazione d'ordine "$<$". Allora, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z^2 > 0$. Ma allora $1 = 1^2 > 0$ e anche $-1 = i^2 > 0$, il che è una contraddizione.)

- *Esercizio.*
  (i) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$;
  (ii) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$;

(iii) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$, $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$ $(w \neq 0)$.

Forme di rappresentazione di un numero complesso z

1. *Forma algebrica*: $z = x + yi$.

2. *Forma vettoriale* (o cartesiana): $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Significato geometrico (nel piano cartesiano) del multiplo, della somma, del modulo.

3. *Forma trigonometrica* (solo per $z \neq 0$):

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove θ è l'angolo orientato in senso antiorario dalla semiretta positiva dell'asse reale alla semiretta dall'origine attraverso z. L'angolo θ, detto l'*argomento* di z, è determinato univocamente a meno di multipli interi di 2π.
In realtà, $\rho = |z|$ e θ sono le coordinate polari del punto (x, y).
Esempi.

4. *Forma esponenziale* (solo per $z \neq 0$): $z = |z|\,e^{i\theta}$.
Si tratta di una semplice abbreviazione della forma trigonometrica.

- **Teorema.** Siano $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = |z|e^{i\theta}$, $w = |w|e^{i\alpha}$. Allora

$$zw = |z|\,|w|\,e^{i(\theta+\alpha)}\,, \qquad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\,e^{i(\theta-\alpha)}\,.$$

- Da qui segue *il significato geometrico del prodotto* in $\mathbb{C}$: dati z, w come sopra, il prodotto zw si ottiene da z moltiplicandolo prima per il numero reale positivo $|w|$ e ruotandolo poi (in senso antiorario) attorno all'origine di un angolo pari all'argomento di w.
Ad esempio, moltiplicare un numero complesso per i significa farlo ruotare attorno a 0 di $\frac{\pi}{2}$.

- Esempio. Determinare la forma trigonometrica di $\frac{-3+i\sqrt{3}}{1-i}$.

- **Corollario (formula di De Moivre).** Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = |z|e^{i\theta}$.
Allora

$$z^n = |z|^n\,e^{in\theta} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

- **Corollario (calcolo delle radici n-esime).** Siano $z_0 \neq 0$ un numero complesso, $n \in \mathbb{N}$. Allora l'equazione
$$w^n = z_0$$
ha esattamente n distinte soluzioni in $\mathbb{C}$; esse possono essere calcolate come segue, partendo dalla forma esponenziale $z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}$:
$$w_k = |z_0|^{1/n}\, e^{i(\frac{\theta_0}{n}+k\frac{2\pi}{n})}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,.$$
Si osservi che le n soluzioni $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ (dette le *radici n-esime di* z_0) giacciono sulla circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z_0|}$ centrata nell'origine e formano i vertici di un poligono regolare di n lati (inscritto in quella circonferenza).

- Esempio. Trovare le radici cubiche di $3i$.

- **Teorema fondamentale dell'algebra.** Sia $n \in \mathbb{N}$. Per ogni polinomio P di grado n in variabile complessa e con coefficienti complessi, cioè
$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad \text{con } a_k \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,\ z \in \mathbb{C},$$
esistono n numeri complessi $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (non necessariamente tra loro distinti) tali che
$$P(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n) \qquad (z \in \mathbb{Z}).$$
In particolare, ogni polinomio ha almeno una radice in $\mathbb{C}$ (il che non è vero in $\mathbb{R}$: si consideri, ad es., $P(x) = x^2 + 1$).

- Esempi di esercizi. Risolvere in $\mathbb{C}$:
  (i) $z\,|z|^2 - 4i\bar{z} = 0$;
  (ii) $z^2 + (1+i)z - i = 0$.

13/01/2016 [2 ore: n. 52,53]

Esercizi vari svolti

- Si consideri il numero complesso $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$.
  (i) $z^4 = ?$
  (ii) Determinare tutti i $w \in \mathbb{C}$ tali che $w^3 = z$.

- Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+2x-x^2}+\sqrt{1-2x+x^2}-2+\alpha x^2+3x^3}{x^2(1-e^{\sin x})}\,.$$

- Siano $a \in \mathbb{R}$, e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tre volte derivabile. Sapendo che, per $x \to 2$,
$$f(x) = 3 + a(a^2-4)(x-2) + 2(a-2)(a+1)(x-2)^2 + (x-2)^3 + o((x-2)^3),$$
stabilire per quali a il grafico di f presenta, nel punto di ascissa 2, uno dei seguenti comportamenti (specificando quale): massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.

- Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, studiare la continuità e la derivabilità della funzione
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(3\log x)-1}{\sqrt[5]{x}-1} & \text{se } x > 1, \\ ax^2+bx & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$$

- Scrivere il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = \pi$ di grado 2 della funzione
$$f(x) = \log\big(3+\cos(x/2)\big)\,.$$

- Sia $A = \{|x| + \frac{x^2}{x+7} : -7 < x \leq 3\}$. Determinare (se esistono): $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$.

FINE DEL CORSO
