Gerarchia degli infiniti
L.V., 2015

A lezione abbiamo usato la seguente *notazione semplificata*: la scrittura

$$x_n \ll y_n$$

significa che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

(cioè, "x_n è trascurabile rispetto a y_n" per $n \to +\infty$).

In questo testo presenteremo una dimostrazione della seguente **gerarchia degli infiniti**:
per ogni $a, b \in (1, +\infty)$ *e* $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ *si ha*

scala1 (1) $$(\log_b n)^\beta \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n\,.$$

Notiamo che in (1) compaiono quattro limiti da dimostrare.

Per dimostrare *il secondo* e *il terzo* limite in (1), basta utilizzare in modo diretto il *criterio del rapporto* [esercizio!].

Anche per la dimostrazione del *quarto* limite è possibile applicare il criterio del rapporto, se si conosce già il limite che definisce il numero e. Ma è possibile procedere anche direttamente, e molto più semplicemente, come segue:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n}\right).$$

Ora, il termine a destra tende a zero in quanto $\frac{1}{n} \to 0$ e la successione tra parentesi è limitata (a valori in $(0, 1]$).

Rimane da dimostrare *il primo* limite in (1). Procederemo in alcuni semplici passi.

a) **Lemma.** *Siano:* $\{x_n\}$ *una successione in* $\mathbb{R}$ *tale che* $x_n \to p \in \overline{\mathbb{R}}$*, e* $\{s_n\}$ *una successione in* $\mathbb{N}$ *tale che* $s_n \to +\infty$*. Allora*

$$x_{s_n} \to p\,.$$

(Significato: se x_n tende a p, allora tenderà a p anche se il suo indice "viaggia in $\mathbb{N}$ verso $+\infty$" in modo qualsiasi, non necessariamente monotono.) La *dimostrazione* di questo Lemma è un facile esercizio sulla definizione di limite [fatela!].

b) **Una generalizzazione del secondo limite in** (1)**.**
Siano a, α come sopra. Se $\{z_n\}$ è una successione in $(0, +\infty)$ tale che $z_n \to +\infty$, allora

$$\frac{(z_n)^\alpha}{a^{z_n}} \to 0\,.$$

(In altre parole, il secondo limite in (1) continua a valere se, al posto di n, mettiamo una qualsiasi successione di numeri *reali* che tende a $+\infty$.)

Dimostrazione. Considerando la parte intera, abbiamo per ogni n

intera (2)
$$[z_n] \le z_n < [z_n] + 1.$$

Ora,

e (3)
$$0 \le \frac{(z_n)^\alpha}{a^{z_n}} \le \frac{([z_n] + 1)^\alpha}{a^{[z_n]}} = a \cdot \frac{([z_n] + 1)^\alpha}{a^{[z_n]+1}}.$$

Applicando il nostro Lemma (con $s_n = [z_n] + 1 \in \mathbb{N}$), l'ultimo termine in (3) tende a zero. Per il teorema del confronto ("dei due carabinieri"), anche il nostro limite è zero.

c) **Dimostrazione del primo limite in** (1)**.**
Vogliamo dimostrare che $x_n := \frac{(\log_b n)^\beta}{n^\alpha} \to 0$. Poniamo $z_n := \alpha \log_b n$ e osserviamo che $z_n \to +\infty$. Inoltre, $z_n = \log_b(n^\alpha)$ e quindi $n^\alpha = b^{z_n}$. Applicando il punto b), otteniamo che

$$x_n = \frac{(z_n/\alpha)^\beta}{b^{z_n}} = \frac{1}{\alpha^\beta} \cdot \frac{(z_n)^\beta}{b^{z_n}} \to 0,$$

e la dimostrazione è completa.

* * *

Gerarchia generalizzata. Partendo da (1) e utilizzando (analogamente a come fatto sopra) il nostro Lemma insieme a (2), è possibile dimostrare la seguente generalizzazione di (1) [è un *esercizio per studenti "motivati"*].
Siano $a, b \in (1, +\infty)$, $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$, e sia $\{z_n\}$ una successione in $(0, +\infty)$ tale che $z_n \to +\infty$. Allora

$$(\log_b z_n)^\beta \ll (z_n)^\alpha \ll a^{z_n} \ll [z_n]! \ll (z_n)^{z_n}\,.$$