Analisi matematica 1 (Fisica)

Prova scritta dell' 11 luglio 2016

Breve svolgimento dell'Esercizio 7

7. *Al variare di $a \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza assoluta e quella semplice della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^a}{1+n^{2a}} \ . \quad \textit{(Potrebbe essere utile considerare } f(x) = \tfrac{x^a}{1+x^{2a}}\ ,\ x>0.\textit{)}$$

Scrivere uno svolgimento completo!

Soluzione.

Prima di tutto bisogna ricordare che alcuni criteri di convergenza delle serie numeriche (ad es., confronto, confronto asintotico, rapporto/radice, ...) sono applicabili solo con serie a termini di segno (almeno definitivamente) costante. *Molti di voi non lo ricordavano durante lo scritto!*

Denotiamo cosí la nostra serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^a}{1+n^{2a}} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \ . \tag{1}$$

Convergenza assoluta. Notiamo che il comportamento di n^a dipende dal segno di a.

(a) Per $a > 0$, $|x_n| \sim \frac{n^a}{n^{2a}} = \frac{1}{n^a} \to 0$. Inoltre, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ converge se e solo se $a > 1$ (confronto asintotico).

(b) Per $a = 0$, $|x_n| = \frac{1}{2}$ per ogni n; per cui la serie (1) non converge neanche semplicemente.

(c) Per $a < 0$, $|x_n| \sim \frac{n^a}{1} = \frac{1}{n^{-a}} \to 0$. Inoltre, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ converge se e solo se $a < -1$.

Convergenza semplice. Siccome per $|a| > 1$ la nostra serie converge anche semplicemente, rimangono da studiare i casi di

$$a \in [-1, 0) \cup (0, 1].$$

La (1) è del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n |x_n|$ con $|x_n| \to 0$. Per poter applicare il criterio di Leibniz, bisogna verificare che $|x_n| \searrow 0$ in modo monotono. Per la funzione f suggerita nel testo, abbiamo su $(0, +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{ax^{a-1} \cdot (1 + x^{2a}) - x^a \cdot 2ax^{2a-1}}{(1 + x^{2a})^2} = \ldots = \frac{ax^{a-1}(1 - x^{2a})}{(1 + x^{2a})^2} \ .$$

Si vede facilmente che $f'(x) < 0$ sia per $a > 0$ sia per $a < 0$. Per ogni $a \neq 0$ la funzione f è strettamente decrescente su $(0, +\infty)$, e quindi la successione $\{|x_n|\}$ è strettamente decrescente. Per tali a la nostra serie converge (Leibniz).

Conclusione.
Se $|a| > 1$, la serie (1) converge assolutamente (e quindi anche semplicemente).
Se $a \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, la serie converge solo semplicemente.
Per $a = 0$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2}$ che è una serie irregolare.

Commento. In questo caso, la monotonia della funzione f poteva anche essere dimostrata senza derivare, osservando che

$$f(x) = \frac{1}{x^a + x^{-a}} = \frac{1}{e^{a \log x} + e^{-a \log x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{Ch}(a \log x)}$$

e utilizzando la conoscenza dell'andamento dei grafici delle funzioni "log" e "Ch".

Vi prego di segnalarmi gli eventuali errori di stampa.
Grazie! L.V.