Analisi matematica 1 (Fisica)

Prova scritta del 17 febbraio 2016

Breve svolgimento della versione A

E' utile ricordare che:

- *comprendere la soluzione di qualcun altro è una cosa, mentre saper risolvere l'esercizio da soli è tutta un'altra cosa;*
- *se voglio imparare a fare qualcosa, devo esercitarmi in* quella *cosa.*

---

1. *Stabilire per quali valori del parametro reale β è convergente la seguente serie (specificando se si tratta di convergenza semplice o assoluta)*

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{\beta}{2\beta-6}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}\,\log^3 n}\,.$$

Soluzione. La serie è della forma

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n}\,\log^3 n} \qquad \text{dove } \ c = \tfrac{\beta}{2\beta-6}\,.$$

Sia x_n il termine generale di questa serie.
Applichiamo il criterio del rapporto alla successione $\{|x_n|\}$. Si calcola facilmente *[fatelo!]* che

$$\tfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \to |c|\,;$$

ne deduciamo che:

- per $|c| > 1$, si ha che $|x_n| \to +\infty$, e quindi la nostra serie non converge;
- per $|c| < 1$, la nostra serie converge assolutamente.

Rimangono solo due casi: $c = \pm 1$.
Se $c = 1$, la serie diventa $\sum_3^\infty \frac{1}{\sqrt{n}\,\log^3 n}$. Questa serie è una delle serie notevoli e sappiamo che essa diverge.
Se invece $c = -1$, la serie diventa $\sum_3^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,\log^3 n}$. Questa serie converge per il criterio di Leibniz (ma non converge assolutamente *[perché?]*).
Ricapitolando, la serie converge assolutamente (e quindi anche semplicemente) se e solo se $|c| < 1$; essa convege solo semplicemente se e solo se $c = -1$. Ora è facile tradurre questa risposta in termini di β.

Risposta: La serie converge assolutamente per $\beta \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$, e converge solo semplicemente per $\beta = 2$.

---

2. *Sia* $L = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re(z) \leq 0 \ , \ Im(z) \geq 0\}$ *e sia* S *l'insieme delle soluzioni dell'equazione*

$$z^3 = -\frac{i}{2}|z|\overline{z}\,.$$

$\mathrm{card}(S) = ?$
Gli elementi di $S \cap L$ *in forma trigonometrica o esponenziale sono* ......

Soluzione. Chiaramente, $z = 0$ è una soluzione. Supponiamo ora che $z \neq 0$. Passando ai moduli nell'equazione, otteniamo $|z|^3 = |-\frac{i}{2}| \cdot |z|^2 = \frac{1}{2}|z|^2$, e quindi $|z| = \frac{1}{2}$. Inoltre, moltiplicando l'equazione per z, otteniamo

$$z^4 = -\tfrac{i}{2}|z|^3 = (\tfrac{1}{2})^4(-i) = (\tfrac{1}{2})^4 e^{i3\pi/2}.$$

Quindi vi sono 4 soluzioni non nulle. Esse sono

$$z_k = \tfrac{1}{2}e^{i\left((3\pi/8)+k(\pi/2)\right)} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Un disegno ci rivela immediatamente che, nel secondo quadrante chiuso (che è il nostro insieme L), c'è solo una di queste 4 soluzioni: $z_1 = \frac{1}{2}e^{i7\pi/8}$.
Risposta: $\mathrm{card}(S) = 5$; gli elementi di $S \cap L$ sono: 0 , $\frac{1}{2}\,e^{i7\pi/8}$.

---

3. *Sia* $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua tale che, per* $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$,

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt[3]{x+7} - 2}\,.$$

Allora $\quad f(1) = ?$

Soluzione. Essendo f continua in 1, si ha che $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$. Con la sostituzione $t = x - 1$ (e quindi $x = 1 + t$), oteniamo

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt[3]{x+7} - 2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t + \pi)}{\sqrt[3]{8+t}\, - 2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin(\pi t)}{2\left[(1+\frac{t}{8})^{1/3} - 1\right]} = \lim_{t\to 0} \frac{-\pi t}{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{t}{8}} = -12\pi\,. \end{aligned}$$

(In alternativa, per calcolare il limite era possibile [e, in questo caso, fattibile!] anche l'applicazione della regola di De l'Hopital.)
Risposta: $f(1) = -12\pi$.

---

4. *Sia* $f(x) = x - \sqrt{1 + 2x^2}$. *Allora* $f(\mathbb{R}) = ?$

Soluzione. Chiaramente, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$. Inoltre, siccome $\sqrt{1+2x^2} \sim \sqrt{2}\,x$, e quindi $\sqrt{1+2x^2} = \sqrt{2}\,x + o(x)$, per $x \to +\infty$, abbiamo anche

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Chiaramente, f è derivabile in $\mathbb{R}$ in quanto composta di funzioni elementari e definita in tutto $\mathbb{R}$. La sua derivata è

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+2x^2} \qquad \text{per ogni } x.$$

Studiando il segno di f' si ottiene facilmente che la funzione f è: strettamente crescente in $(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, e strettamente decrescente in $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ *[fatevi un disegno!]*. Inoltre

$$f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \ \ldots\ = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Risposta: $f(\mathbb{R}) = (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

---

5. *Determinare la classe limite della successione*

$$x_n = \frac{(-1)^{n+1}3^n + \big(1+(-1)^{n+1}\big)2^{n+1}}{\big(1+(-1)^n\big)3^{n+1} + (-1)^n 2^n}\,.$$

Soluzione. La presenza di potenze di -1 ci suggerisce di distinguere tra n pari e n dispari.
Per n pari: $x_n = \frac{-3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n} \sim \frac{-3^n}{2\cdot 3^{n+1}} \to -\frac{1}{6}$.
Per n dispari: $x_n = \frac{3^n+2^{n+2}}{-2^n} \sim \frac{3^n}{-2^n} = -(\frac{3}{2})^n \to -\infty$.
Abbiamo quindi decomposto la nostra successione in due sottosuccessioni di cui una converge a $-\frac{1}{6}$ e l'altra diverge a $-\infty$.
Risposta: $\mathcal{E} = \big\{-\frac{1}{6}\,, -\infty\big\}$.

---

6. *In* $\mathbb{R}^2$ *si consideri l'insieme* $E = (A\cap B)\cup C$ *dove*
$A = \big\{(x,y) : x^2+y^2 \le 2\big\}$, $B = \big\{(x,y) : x > 0\big\}$, $C = \big\{\big(\frac{1}{n} - 3\,,\,1\big) : n \in \mathbb{N}\big\}$.
Allora: $E^\circ = ?\,;\ \ E' = ?\,;\ \ \partial E = ?\,.$

Soluzione. Cerchiamo di visualizzare l'insieme E *[fatevi un disegno!]*. Esso consiste del semicerchio destro, centrato nell'origine e di raggio $\sqrt{2}$, senza la parte del bordo contenuta nell'asse delle y, al quale è stata aggiunta una successione di punti convergente al punto $(-3,1)$ (e tutta questa successione è "lontano" dal semicerchio). Ora è sufficiente applicare le definizioni di $E^\circ, E', \partial E$ (e scrivere correttamente la risposta!).

- E°, l'interno di E, è esattamente il semicerchio aperto (cioè, privato del suo bordo).
- E', l'insieme dei punti di accumulazione di E, è il semicerchio chiuso (cioè, incluso tutto il suo bordo) con l'aggiunta del punto $(-3,1)$.

- ∂E, la frontiera di E, è composta dal bordo del semicerchio (fatto di una semi-circonferenza e un segmento verticale), la successione C e il suo limite $(-3,1)$.

Risposta:

$E^\circ = \{(x,y) : x^2+y^2 < 2, x > 0\}$

$E' = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2, x \geq 0\} \cup \{(-3,1)\}$

$\partial E = \{(x,y) : x^2+y^2 = 2, x \geq 0\} \cup \{(0,y) : -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}\} \cup C \cup \{(-3,1)\}$

---

7. *Calcolare, al variare di $c \in \mathbb{R}$, il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x-x^2} - 1 - x^2 - \sin(2x)}{\sqrt[4]{1+x^3} - \cos(cx+x^5)} \ .$$

Soluzione. A priori non è chiaro fino a quale ordine sviluppare. Visto che il denominatore $D(x)$ sembra più semplice (pur contenendo un parametro), proviamo ad iniziare con esso:

$$\begin{aligned} D(x) &= \Big[1 + \tfrac{1}{4}x^3 + \tbinom{1/4}{2}x^6 + \dots\Big] - \big[1 - \tfrac{1}{2}(cx+x^5)^2 + \tfrac{1}{4!}(cx+x^5)^2 - \dots\big] \\ &= \tfrac{c^2}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + o(cx^3). \end{aligned}$$

Quindi: $D(x) \sim \frac{c^2}{2}x^2$ se $c \neq 0$, and $D(x) \sim \frac{1}{4}x^3$ se $c = 0$.

Svilupperemo quindi il numeratore $N(x)$ fino a $o(x^3)$ (stando attenti a non perdere alcun termine con potenze di x minori o uguali alla terza):

$$\begin{aligned} N(x) &= 1 + (2x-x^2) + \tfrac{1}{2}(2x-x^2)^2 + \tfrac{1}{3!}(2x-x^2)^3 + o(x^3) \\ &\qquad - 1 - x^2 - \big[2x - \tfrac{1}{3!}(2x)^3 + o(x^3)\big] \\ &= x^2(-1+2-1) + x^3(-2+\tfrac{4}{3}+\tfrac{4}{3}) + o(x^3) = \tfrac{2}{3}x^3 + o(x^3) \sim \tfrac{2}{3}x^3. \end{aligned}$$

Ora è facile concludere.

Conclusione:

- per $c = 0$, il limite vale $\frac{8}{3}$;
- per $c \neq 0$, il limite vale 0.

Vi prego di segnalarmi gli eventuali errori di stampa.
Grazie! L.V.