Analisi matematica 1 (Fisica)

Prova scritta del 18 febbraio 2015

Breve svolgimento della versione A

E' utile ricordare che:

- *comprendere la soluzione di qualcun altro è una cosa, mentre saper risolvere l'esercizio da soli è tutta un'altra cosa;*
- *se voglio imparare a fare qualcosa, devo esercitarmi in* quella *cosa.*

---

1. *Si consideri la seguente equazione nel piano complesso.*

$$z^3|z|^2 = (1+i)^4\bar{z}$$

Quante sono le soluzioni distinte? Quali sono?

Soluzione.
Siccome $|z|^2 = z\bar{z}$, l'equazione può essere riscritta nella forma

$$z^4\bar{z} = (1+i)^4\bar{z}.$$

Chiaramente, $z = 0$ è una soluzione. Per $z \neq 0$ possiamo semplificare:

$$z^4 = (1+i)^4.$$

Sicuramente $z = 1+i$ è una soluzione. Dalla teoria sappiamo che le soluzioni dell'ultima equazione sono quattro e che esse sono equi-distribuite su una stessa circonferenza centrata nell'origine. Ora, senza fare conti, è chiaro come sono fatte le altre tre soluzioni *(fatevi un disegnino!)*.

Risposte: Ci sono esattamente 5 soluzioni; esse sono:

$$0, \quad 1+i, \quad -1+i, \quad -1-i, \quad 1-i.$$

---

2. *Determinare l'equazione dell'eventuale asintoto a $+\infty$ della funzione*

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-6x+5}} \ .$$

Soluzione.
È immediato calcolare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (che è il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto). Presentiamo due possibilità per il proseguimento della soluzione.

Possibilità 1. Se mi accorgo che $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$, ho $f(x)=x\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-5}}$, e quindi

$$\begin{aligned} f(x)-x &= x\left[\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}}}-1\right] \\ &= x\left[\left(1-\tfrac{1}{x}\right)^{1/2}\left(1-\tfrac{5}{x}\right)^{-1/2}-1\right]. \end{aligned}$$

La presenza di x davanti alla parentesi quadra mi segnala che, negli sviluppi, è sufficiente andare fino a $o(\frac{1}{x})$:

$$\begin{aligned} f(x)-x &= x\left[\left(1-\tfrac{1}{2x}+o(\tfrac{1}{x})\right)\left(1+\tfrac{5}{2x}+o(\tfrac{1}{x})\right)-1\right] \\ &= 2+o(1)\to 2. \end{aligned}$$

Possibilità 2. In alternativa,

$$\begin{aligned} f(x)-x &= x\left[\frac{x-1}{\sqrt{x^2-6x+5}}-1\right] \\ &= x\left[\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}}-1\right]. \end{aligned}$$

Passando al denominatore comune e osservando che la radice tende a 1, otteniamo

$$f(x)-x\sim x\left[1-\tfrac{1}{x}-\left(1-\tfrac{6}{x}+\tfrac{5}{x^2}\right)^{1/2}\right].$$

Di nuovo osserviamo che, negli sviluppi, è sufficiente la precisione di $o(\frac{1}{x})$. Con pochi conti si ottiene che $f(x)-x\sim 2+o(1)\to 2$.

Risposta: $y=x+2$.

---

3. *Sia* $A=f\big((0,3)\big)$ *dove*

$$f(x)=(x-3)^2\log(3-x)\,. \qquad\qquad \textit{Allora}$$

$\sup A=?$; $\inf A=?$; *Esiste* $\max A$?; *Esiste* $\min A$?

Soluzione.

Per determinare l'insieme A, abbiamo bisogno di sapere qualcosa sull'andamento del grafico di f. È facile calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=9\log 3\,,\quad \lim_{x\to 3^-} f(x)=0.$$

Derivando si ottiene facilmente che

$$f'(x)=(x-3)\big(2\log(3-x)+1\big).$$

Studiando il segno della derivata, si scopre che, denotando $x_0=3-e^{-1/2}$:

- f è strettamente decrescente in $(0,x_0]$;
- f è strettamente crescente in $[x_0,3)$.

Inoltre, $f(x_0) = -\frac{1}{2e}$. Tracciando un semplice grafico di f, si vede che l'insieme immagine è:

$$A = [-\tfrac{1}{2e}\,,\, 9\log 3\,).$$

Risposta: $\sup A = 9\log 3\,$; $\max A$ non esiste; $\inf A = \min A = -\frac{1}{2e}\,$.

---

4. *Sapendo che la successione di numeri positivi $\{x_n\}$ è tale che $x_n \to +\infty$, è possibile dedurre che:*

$\log(1+x_n) \sim x_n$	**V** **F**	*la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^2}$ *converge*	**V** **F**
$e^{-x_n} = o(1/x_n)$	**V** **F**	$\{x_n\}$ *è definitivamente monotona*	**V** **F**

Soluzione.

- $\boxed{\log(1+x_n) \sim x_n}$ è **falsa**: ad esempio, per $x_n = n$ abbiamo $\frac{\log(1+x_n)}{x_n} \sim \frac{\log n}{n} \to 0$.
- $\boxed{e^{-x_n} = o(1/x_n)}$ è **vera**: infatti, $\frac{e^{-x_n}}{1/x_n} = \frac{x_n}{e^{x_n}} \to 0$.
- $\boxed{\text{la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^2} \text{ converge}}$ è **falsa**: ad esempio, per $x_n = \sqrt{n}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.
- $\boxed{\{x_n\} \text{ è definitivamente monotona}}$ è **falsa**: infatti, una successione divergente a $+\infty$ può tendere a $+\infty$ in modo "a zigzag"; si consideri, ad es., la successione $x_n = n + (-1)^n$ *[verificate che non è definitivamente monotona!]*.

---

5. *Per ciascuna delle funzioni*

$$f(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,, \qquad g(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt[3]{|x-1|}}\,,$$

tracciare un suo grafico qualitativo (due grafici separati).

Soluzione. Il grafico della funzione $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1/3}$ assomiglia al grafico di $1/x$ (gli stessi insieme di definizione, limiti, asintoti segno, monotonia, convessità).

Ora, il grafico di f si ottiene da quello di φ tramite una traslazione di 1 verso destra, e di 2 verso l'alto. (Avrà quindi le rette $x = 1$ e $y = 2$ come asintoti.)

Il grafico di g coincide, per $x > 1$, con il grafico di f, mentre la parte per $x < 1$ si ottiene dall'altra tramite una simmetria rispetto alla retta $x = 1$. (In alternativa, si può ottenere il grafico di g da quello di $|x|^{-1/3}$ tramite le due traslazioni di cui sopra.)

---

6. *In* $\mathbb{R}$, *si considerino gli insiemi* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\,,\quad B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n\,,\quad E = A \cup J\,,$ *dove*

$I_n = \left\{x \in \mathbb{R} : -3 + \dfrac{1}{n} \le x \le n^2 + 1\right\},\ n \in \mathbb{N};$

$J = \left\{x \in \mathbb{R} : x = -3 - \frac{1}{n^2}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}.$

$A = ?$; $B = ?$; $\partial E = ?$; $B \cup J$ *è chiuso?*; $B \cup J$ *è limitato?*

Soluzione.
Osserviamo che gli intervalli $I_n = [-3 + \frac{1}{n}, n^2 + 1]$ sono inscatolati in modo crescente. Ora è facile convincersi che

$$A = (-3, +\infty) \quad \text{e} \quad B = I_1 = [-2, 2].$$

Quindi

$$B \cup J = \{-3 - \tfrac{1}{n^2}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup [-2, 2].$$

Chiaramente, $B \cup J$ **è limitato** (in quanto contenuto in $[-4, 2]$).
Inoltre, $B \cup J$ **non è chiuso** perché non contiene -3 che è il suo punto di accumulazione.

---

7. *Calcolare*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\exp\left(\dfrac{2n-3}{n^2}\right) \cdot \sqrt{1 + \dfrac{5}{n^2}} - 1 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{3}{2n^2}}{\log\left(\dfrac{en^3}{n^3+2}\right) - 1}\,.$$

Svolgimento.
Iniziamo con il denominatore D_n che è chiaramente più semplice e che può fornirci informazioni fino a quale ordine sviluppare il numeratore.

$$D_n = \log e + \log\left(\tfrac{n^3}{n^3+2}\right) - 1 = \log\left(\tfrac{n^3}{n^3+2}\right) \sim \tfrac{n^3}{n^3+2} - 1 = \tfrac{-2}{n^3+2} \sim -\tfrac{2}{n^3}.$$

Di conseguenza, dobbiamo sviluppare il numeratore N_n fino a $o(\frac{1}{n^3})$.

$$\begin{aligned} N_n &= \exp\left(\tfrac{2}{n} - \tfrac{3}{n^2}\right) \cdot \left(1 + \tfrac{5}{n^2}\right)^{1/2} - 1 - \tfrac{2}{n} - \tfrac{3}{2n^2} \\ &= \Big[1 + \left(\tfrac{2}{n} - \tfrac{3}{n^2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{n} - \tfrac{3}{n^2}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{2}{n} - \tfrac{3}{n^2}\right)^3 + o(\tfrac{1}{n^3})\Big]\left[1 + \tfrac{5}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^3})\right] \\ &\quad - 1 - \tfrac{2}{n} - \tfrac{3}{2n^2} \\ &= \tfrac{1}{n^2}\left(-3 + 2 + \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}\right) + \tfrac{1}{n^3}\left(-6 + \tfrac{4}{3} + 5\right) + o(\tfrac{1}{n^3}) = \tfrac{1}{3n^3} + o(\tfrac{1}{n^3}) \sim \tfrac{1}{3n^3}\,. \end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N_n}{D_n} = -\frac{1}{6}\,.$$

Vi prego di segnalarmi gli eventuali errori di stampa.
Grazie! L.V.