Analisi matematica 1 (Fisica)
Prova scritta del 27 gennaio 2016
Breve svolgimento della versione A

E' utile ricordare che:
- *comprendere la soluzione di qualcun altro è una cosa, mentre saper risolvere l'esercizio da soli è tutta un'altra cosa;*
- *se voglio imparare a fare qualcosa, devo esercitarmi in* quella *cosa.*

---

1. *Stabilire per quali valori del parametro reale a è convergente la serie*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\big(3^n + n^3\big)}{n^{3a}\big(3^{2/n} - 1\big)}\,.$$

Soluzione. Denotando con x_n il termine generale della serie (e ricordando che se $x_n \sim y_n \to +\infty$ allora anche $\log x_n \sim \log y_n$), otteniamo
$$x_n \sim \frac{n \log 3}{n^{3a} \cdot \frac{2}{n} \cdot \log 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{3a-2}}\,.$$
Per il criterio di confronto asintotico, la serie converge se e solo se $3a - 2 > 1$.
Risposta: $a > 1$.

---

2. *Sapendo che la funzione* $f(x) = \arctan\big(3 - 4e^{2x}\big) - x$ *è strettamente monotona su $\mathbb{R}$, detta g la sua inversa, calcolare $g'(-\frac{\pi}{4})$.*
(Ricordare che $\arctan(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{4}$*.)*

Soluzione. Si ha che $f(0) = -\frac{\pi}{4}$ e
$$f'(x) = \frac{-8e^{2x}}{(3 - 4e^{2x})^2 + 1} - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Quindi $f'(0) = -5 \neq 0$. Ora il resto segue dal teorema sulla derivata della funzione inversa.
Risposta: $g'(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{5}\,.$

---

3. *Sia* $f(x) = e^{4x} - e^{2x}$. *Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare il numero degli elementi distinti dell'insieme $f^{-1}(a)$.*

Soluzione. Si ha che $f(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Inoltre, f è dappertutto derivabile con

$$f'(x) = 4e^{4x} - 2e^{2x} = 4e^{2x}(e^{2x} - \tfrac{1}{2}) .$$

Ne segue che, denotando $p := -\frac{\log 2}{2} < 0$, la funzione f è: strettamente decrescente in $(-\infty, p]$; e strettamente crescente in $[p, +\infty)$. Disegnando un grafico qualitativo di f e confrontandolo con le rette orizzontali $y = a$, possiamo facilmente formulare la risposta.

Risposta:

$$\operatorname{card} f^{-1}(a) = \begin{cases} 2 & \text{se } a \in (-\frac{1}{4}, 0), \\ 1 & \text{se } a \in \{-\frac{1}{4}\} \cup [0, +\infty), \\ 0 & \text{se } a < -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

---

4. *Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quattro volte derivabile e tale che, per $x \to 0$,*

$$f(x) = 4 + a(a-1)(a-2)x + a(a^2-4)x^2 + a(a+1)x^3 + \frac{1}{5}x^4 + o(x^4) .$$

Stabilire per quali a il grafico di f presenta, nel punto di ascissa 0, uno dei seguenti comportamenti (specificando quale): massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.

Soluzione. Abbiamo i seguenti 4 casi significativi:

(1) $a = 0$: $f(x) = 4 + \frac{1}{5}x^4 + o(x^4)$;
(2) $a = 1$: $f(x) = 4 - 3x^2 + o(x^2)$;
(3) $a = 2$: $f(x) = 4 + 6x^3 + o(x^3)$;
(4) $a = -2$: $f(x) = 4 - 24x + 2x^3 + o(x^3)$.

Da qui si deduce la risposta (si veda, ad es., il file *Come "leggere" uno sviluppo di Taylor* sul mio sito).

Risposta:

(1) $a = 0$: minimo (almeno relativo);
(2) $a = 1$: massimo (almeno relativo);
(3) $a = 2$: flesso a tangente orizzontale;
(4) $a = -2$: flesso (a tangente obliqua di equazione $y = 4 - 24x$).

---

5. *Determinare l'eventuale asintoto, per $x \to +\infty$, della funzione*

$$f(x) = (e^{2/x} - 1)\,\frac{x^4 - 3x^3 + 7}{x^2 + 1}.$$

Soluzione. Possiamo usare il "metodo classico" per determinare l'asintoto $y = mx + q$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\,, \qquad q = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - mx\big)\,.$$

Per $x \to +\infty$, abbiamo:

$$\frac{f(x)}{x} \sim \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}\cdot x^2 = 2.$$

Consideriamo l'espressione

$$f(x) - 2x = \frac{(e^{2/x}-1)(x^4 - 3x^3 + 7) - 2x^3 - 2x}{x^2+1}$$

di cui ci interessa il limite. Il denominatore: $D(x) \sim x^2$, per cui dobbiamo sviluppare in numeratore $N(x)$ fino a $o(x^2)$. Siccome la seconda parentesi è asintotica a x^4, svilupperemo la prima fino a $o(\frac{1}{x^2})$. Quindi:

$$\begin{aligned} N(x) &= \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right)(x^4 - 3x^3 + 7) - 2x^3 + o(x^2) \\ &= -4x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Perciò $\frac{N(x)}{D(x)} \to -4$.
Risposta: $y = 2x - 4$.

Un *metodo alternativo* consiste nello sviluppare f nella forma

$$f(x) = mx + q + o(1) \qquad (x \to +\infty).$$

Calcoliamo (in modo da non omettere alcuna potenza non negativa di x):

$$\begin{aligned} f(x) &= (e^{2/x}-1)\frac{x^2 - 3x + \frac{7}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= (e^{2/x}-1)\left(x^2 - 3x + \frac{7}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right)\left(x^2 - 3x + \frac{7}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right) \\ &= 2x - 4 + o(1). \end{aligned}$$

Otteniamo così, naturalmente, lo stesso risultato.

---

6. *In $\mathbb{R}^2$, si consideri l'insieme*

$$A = \left\{\left(\sin\frac{\pi n}{2}\ ,\ 2 - \frac{1}{k}\right), \quad k, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Allora: $A^\circ = ?$ *;* $A' = ?$ *;* $\mathrm{diam}(A) = ?$.

Soluzione. Per prima cosa, bisogna capire come è fatto l'insieme. Siccome $\sin\frac{\pi n}{2}$ assume solo i valori $1, 0, -1$, possiamo scrivere

$$A = \left\{(1, 2-\tfrac{1}{k}) : k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{(0, 2-\tfrac{1}{k}) : k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{(-1, 2-\tfrac{1}{k}) : k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Vediamo che A consiste di tre successioni (convergenti) in $\mathbb{R}^2$. Da qui facilmente A° e A'. Per determinare il diametro, basta ricordare che esso è definito come l'estremo superiore di tutte le possibili distanze di due punti dell'insieme A. Disegnandosi A, vediamo che $\mathrm{diam}(A)$ è la lunghezza della diagonale del rettangolo di vertici

$$(-1, 2),\ (-1, 1),\ (1, 2),\ (1, 1).$$

Risposta:

$A^\circ = \emptyset$;
$A' = \{(-1, 2),\ (0, 2),\ (1, 2)\}$;
$\mathrm{diam}(A) = \sqrt{5}$.

---

7. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2-3x^4} + \log\left(1 - x^2 - x^4\right) - 1 + 4x^4}{\sin x^6}.$$

Soluzione. Denotando con $N(x)$ e $D(x)$, rispettivamente, il numeratore e il denominatore della frazione, vediamo subito che

$$D(x) \sim x^6.$$

Di conseguenza, bisogna sviluppare $N(x)$ fino a $o(x^6)$, essendo sicuri di non perdere alcuna potenza di x fino alla sesta compresa. (Bisogna ricordarsi che, ad esempio, siccome $(x^2 - 3x^4)^3 \sim x^6$ abbiamo $o\big((x^2 - 3x^4)^3\big) = o(x^6)$.)

$$\begin{aligned} N(x) &= 1 + (x^2 - 3x^4) + \tfrac{1}{2}(x^2 - 3x^4)^2 + \tfrac{1}{6}(x^2 - 3x^4)^3 + o\big((x^2 - 3x^4)^3\big) \\ &\quad + (-x^2 - x^4) - \tfrac{1}{2}(-x^2 - x^4)^2 + \tfrac{1}{3}(-x^2 - x^4)^3 + o\big((-x^2 - x^4)^3\big) \\ &\quad - 1 + 4x^4 \\ &= \ \dots\ = x^4\left(-3 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - 1 + 4\right) + x^6\left(-3 + \tfrac{1}{6} - 1 - \tfrac{1}{3}\right) + o(x^6) \\ &= -\tfrac{25}{6}x^6 + o(x^6) \sim -\tfrac{25}{6}x^6. \end{aligned}$$

Conclusione. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{N(x)}{D(x)} = -\frac{25}{6}$.

Vi prego di segnalarmi gli eventuali errori di stampa.
Grazie! L.V.