Analisi matematica 1 (Fisica)
Prova scritta del 28 gennaio 2015

Breve svolgimento della versione A

E' utile ricordare che:

- *comprendere la soluzione di qualcun altro è una cosa, mentre saper risolvere l'esercizio da soli è tutta un'altra cosa;*
- *se voglio imparare a fare qualcosa, devo esercitarmi in* quella *cosa.*

---

1. *Sia* $A = \{x \in \mathbb{R} : \lfloor f(x) \rfloor = 3\}$ *dove* $f(x) = \sqrt{|x-1|} + 1$ *e* $\lfloor t \rfloor$ *denota la parte intera di* t*. Scrivere* A *come intervallo o unione di intervalli.*

Soluzione. Siccome $\lfloor t \rfloor = 3$ se e solo se $t \in [3,4)$, dobbiamo risolvere il sistema di disequazioni

$$3 \leq \sqrt{|x-1|} + 1 < 4\,.$$

Esso equivale a

$$4 \leq |x-1| < 9$$

che è facile da risolvere.

Risposta: $A = (-8,-3] \cup [5,10)$.

---

2. *Stabilire per quali valori del parametro* reale a*, la seguente serie è convergente.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n^a)}{1+n^{a/3}}\,.$$

Soluzione. Sia x_n il termine generale della serie (che è a termini positivi!). Siccome il comportamento di n^a dipende dal segno di a, abbiamo tre casi possibili.

(a) Caso $a > 0$. In questo caso $x_n \sim \frac{\pi/2}{n^{a/3}}$ e quindi, per il criterio di confronto asintotico, la serie converge se e solo se $\frac{a}{3} > 1$, cioè, $a > 3$.

(b) Caso $a = 0$. In questo caso $x_n = \frac{\pi}{8}$ per ogni n, e quindi la serie diverge (infatti, $x_n \not\to 0$).

(c) Caso $a < 0$. In questo caso $n^a \to 0$ e quindi $x_n \sim n^a$; ne segue che la serie converge se e solo se $a < -1$.

Risposta: $a \in (-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$.

---

3. *Determinare l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = e$ al grafico della funzione $f(x) = (3 - \log x)^x$.*

Soluzione. $f(e) = 2^e$. Siccome $f(x) = e^{x \log(3 - \log x)}$, abbiamo

$$f'(x) = f(x) \left[\log(3 - \log x) + \tfrac{x}{3 - \log x}(-\tfrac{1}{x}) \right] ,$$

da cui $f'(e) = 2^e \big((\log 2) - \frac{1}{2} \big)$.

Risposta: $y = 2^e + 2^e \big((\log 2) - \frac{1}{2} \big)(x - e)$.

---

4. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia*

$$x_n = n^{3/2} \Big(1 - \cos \tfrac{1}{\sqrt{n}} \Big) \Big(a - \sin(\tfrac{n\pi}{2}) \Big) .$$

Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$, la successione $\{x_n\}$ ammette limite (finito o infinito).

Soluzione. Denotiamo $y_n := n^{3/2}(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}})$ e osserviamo che

$$y_n \sim n^{3/2} \cdot \tfrac{1}{2n} = \tfrac{n^{1/2}}{2} \to +\infty.$$

Ora consideriamo l'ultimo fattore di x_n. Siccome la successione $\{\sin \frac{n\pi}{2}\}$ assume ripetutamente i valori $1, 0, -1, 0, \dots$, i valori di

$$z_n := a - \sin \tfrac{n\pi}{2}$$

saranno ciclicamente

$$a - 1, a, a + 1, a, \dots .$$

Quindi la successione $\{x_n\}$ può essere decomposta in tre sottosuccessioni:

$$\{y_n(a - 1)\}_{n=4k+1} , \quad \{y_n(a + 1)\}_{n=4k+3} , \quad \{y_n a\}_{n=2k} .$$

Possiamo considerare i seguenti tre casi.

(a) Se $a \in (-1, 1)$, almeno due delle tre sottosuccessioni saranno divergenti a infiniti opposti.

(b) Se $a = \pm 1$, una delle tre sottosuccessioni sarà identicamente nulla, mentre le altre due saranno divergenti.

(c) Se $|a| > 1$, tutte e tre le sottosuccessioni della nostra successione divergeranno allo stesso limite (infinito).

Ora è facile concludere.

Risposta: $|a| > 1$.

---

5. *Data la funzione*

$$f(x) = \tfrac{3}{x+1} + |x - 2| ,$$

determinare la cardinalità dell'insieme $f^{-1}(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Per determinare la cardinalità (cioè, il numero degli elementi) di ciascuno degli insiemi

$$f^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\} \qquad (y \in \mathbb{R} \text{ fissato}),$$

abbiamo bisogno di avere informazioni sull'andamento del grafico di f.

Chiaramente, f è definita per ogni x diverso da -1, e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \pm\infty\,.$$

Inoltre,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+1} + x - 2 & \text{se } x \geq 2, \\ \frac{3}{x+1} - x + 2 & \text{se } x \in (-\infty,-1)\cup(-1,2]. \end{cases}$$

Per risparmiarci lavoro, possiamo osservare che la funzione $\frac{3}{x+1} - x + 2$ è strettamente decrescente laddove è definita, in quanto somma di due funzioni strettamente decrescenti; perciò f è decrescente in $(-\infty,-1)$ e in $(-1,2]$. (In alternativa, possiamo studiare il segno di f' in $(-\infty,-1)\cup(-1,2)$.)

Per $x > 2$, abbiamo

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 3}{(x+1)^2}$$

e quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $(x+1)^2 > 3$ se e solo se $x \in (-\infty, -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}, +\infty)$. Siccome, nel nostro caso, $x > 2 > -1+\sqrt{3}$, la funzione f è strettamente crescente in $[2,+\infty)$.
Il grafico di f è come segue *[fatevi un disegno!]*:

- ◦ in $(-\infty,-1)$, f decresce da $+\infty$ a $-\infty$;
- ◦ in $(-1,2]$, f decresce da $+\infty$ a $f(2) = 1$;
- ◦ in $[2,+\infty)$, f cresce da 1 a $+\infty$.

Ora è facile contare quante volte il grafico di f interseca un livello fissato y.
Risposta:

- se $y > 1$, $\operatorname{card} f^{-1}(y) = 3$;
- se $y = 1$, $\operatorname{card} f^{-1}(y) = 2$;
- se $y < 1$, $\operatorname{card} f^{-1}(y) = 1$.

---

6. *Se $n \in \mathbb{N}$, siano*

$$A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \geq \tfrac{1}{n}\right\} \cup \left\{(0, -3^{1/n})\right\}\,, \quad B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\,.$$

Determinare: B°, $\overline{B}$, B'.

Soluzione. Per n fissato, l'isieme A_n è il semipiano di disequazione $y \geq -x + \frac{1}{n}$, a cui è stato aggiunto il punto $(0,-3^{1/n})$. Chiaramente *[perché?]*, al crescere di

n, i semipiani diventano sempre più grandi. L'insieme B, che è l'unione degli A_n, è quindi il semipiano aperto di disequazione $y > -x$, unito all'insieme numerabile $\{(0, -3^{1/n}) : n \in \mathbb{N}\}$ (che è una successione convergente al punto $(0, -1) \notin B$). Ora che comprendiamo come è fatto l'insieme B *[fatevi un disegno!]*, possiamo concludere.

Risposta:

$$\begin{aligned}
&B^\circ = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\big\};\\
&\overline{B} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x\big\} \cup \big\{(0, -3^{1/n}) : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{(0, -1)\big\};\\
&B' = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x\big\} \cup \big\{(0, -1)\big\}.
\end{aligned}$$

---

7. *Calcolare il seguente limite.*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}}{(x^3 + 4x^4)\log(1 + 7x)}\ .$$

Soluzione. Uno sguardo al limite ci suggerisce che il denominatore (che denoterò $D(x)$) è molto più semplice da studiare del numeratore (denotato con $N(x)$). Iniziamo quindi con $D(x)$. Per $x \to 0^+$:

$$D(x) \sim x^3 \cdot 7x = 7x^4.$$

Ne segue che, negli sviluppi di Taylor che utilizzeremo per $N(x)$, dobbiamo essere certi di non perdere alcun termine contenente x^4 o potenze inferiori.

$$\begin{aligned}
e^{\sin^2 x} &= 1 + \sin^2 x + \tfrac{1}{2}\sin^4 x + o(\sin^4 x)\\
&= 1 + \big(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^4)\big)^2 + \tfrac{1}{2}\big(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^4)\big)^4 + o(x^4)\\
&= 1 + x^2 + x^4(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}) + o(x^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 - 2x^2)^{-1/2} &= 1 - \tfrac{1}{2}(-2x^2) + \tbinom{-1/2}{2}(-2x^2)^2 + o(x^4)\\
&= 1 + x^2 + \tfrac{3}{2}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi

$$N(x) = x^4(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}) + o(x^4) = -\tfrac{4}{3}x^4 + o(x^4) \sim -\tfrac{4}{3}x^4.$$

Conclusione. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{D(x)} = -\frac{4}{21}\,.$

Vi prego di segnalarmi gli eventuali errori di stampa.
Grazie! L.V.