Due criteri di convergenza per serie numeriche a termini di segno qualunque

(approfondimento per chi è interessato)

L.V., 2019

In questo breve testo dimostreremo i criteri di Abel e di Dirichlet per la convergenza delle serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

dove $\{b_n\}$ è una successione monotona non crescente in $[0, +\infty)$. Tutto si baserà sul seguente semplice lemma.

Lemma 0.1. *Siano $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ $(1 \leq n \leq k)$. Denotiamo*

$$A_0 := 0 \quad e \quad A_n := \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{per } n = 1, 2, \ldots, k.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{k} a_n b_n = A_k b_k + \sum_{n=1}^{k} A_n (b_n - b_{n+1}) \,. \tag{1}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{k} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=1}^{k} A_n b_n \; - \sum_{n=1}^{k} A_{n-1} b_n \\
&= \sum_{n=1}^{k} A_n b_n \; - \sum_{n=0}^{k-1} A_n b_{n+1} = A_k b_k + \sum_{n=1}^{k} A_n (b_n - b_{n+1}) \; - A_0 b_1
\end{aligned}$$

e il resto segue dal fatto che $A_0 = 0$. □

Ricordiamo il seguente semplice (e ben noto) fatto sulle "serie telescopiche", che si dimostra facilmente considerando le somme parziali.
Una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ ha lo stesso comportamento della successione $\{b_n\}$. Inoltre, se esiste il limite $\lim_{n \to \infty} b_n =: \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ allora la somma della serie è $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - \ell$.

Ora siamo pronti a enunciare e dimostrare i due criteri di convergenza.

Theorem 0.2. *Consideriamo una serie del tipo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, b_n \,, \tag{2}$$

dove $b_1 \geq b_2 \geq \dots$.

(a) ***(Criterio di Abel)*** *Se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ha somme parziali limitate e* $b_n \to 0$*, allora la serie* (2) *converge.*
(b) ***(Criterio di Dirichlet)*** *Se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge e la successione* $\{b_n\}$ *è limitata, allora la serie* (2) *converge.*

Dimostrazione. Notiamo che, in entrambi i casi, esiste finito il limite $\lim_{n\to\infty} b_n$. Inoltre, le somme parziali A_k $(k \in \mathbb{N})$ della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sono limitate, e quindi $|A_k| \leq M$ $(k \in \mathbb{N})$ per qualche numero reale $M \geq 0$. Ne segue che

$$\big| A_n(b_n - b_{n+1}) \big| = |A_n|(b_n - b_{n+1}) \leq M(b_n - b_{n+1}).$$

Dall'osservazione sulle serie telescopiche otteniamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$$

converge (assolutamente) in entrambi i casi.

Dalla formula (1) ora segue che, per dimostrare che la serie (2) converge, rimane da dimostrare che la succsessione $\{A_k b_k\}$ converge. Nel caso (a), ciò è vero perché $\{A_k\}$ è limitata e $b_k \to 0$, mentre nel caso (b), entrambe le succesioni $\{A_k\}$, $\{b_k\}$ convergono. □

Observation 0.3. *Osserviamo che il criterio di Leibniz per le serie del tipo* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ *segue direttamente dal Criterio di Abel (Teorema 0.2(a)). Infatti, le somme parziali della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ *sono limitate.*

Example 0.4. Sia $\{b_n\}$ una succsessione in $(0, +\infty)$ che tenda a zero in modo monotono non crescente. Allora le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) b_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n) b_n$$

entrambe convergono.
(Ad esempio, le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^a}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^a}$ convergono per ogni $a > 0$.)

Per dimostrarlo, è sufficiente dimostrare che la successione $A_k = \sum_{n=1}^{k} \sin n$ $(k \in \mathbb{N})$ è limitata, e analogamente per coseno. Usando le formula di Eulero

$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ e la fomula per la somma di una sequenza geometrica $\sum_{n=1}^{k} q^n = \frac{q(q^k-1)}{q-1}$, otteniamo

$$A_k = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=1}^{k} e^{in} - \sum_{n=1}^{k} e^{-in}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^i(e^{ik}-1)}{e^i-1} - \frac{e^{-i}(e^{-ik}-1)}{e^{-i}-1}\right)$$

da cui si ottiene facilmente che

$$|A_k| \le \left|\frac{e^i}{e^i-1}\right| + \left|\frac{e^{-i}}{e^{-i}-1}\right| =: M.$$

(Procedendo i conti di A_k, si potrebbe ottenere una formula semplice esatta, ma noi non ne abbiamo bisogno.)