Esercizi con asterisco 2019–2020

L.V.

1. Dimostrare che è possibile scrivere $\mathbb{N}$ come l'unione di una famiglia infinita non numerabile di insiemi infiniti, a due a due a intersezione finita.

2. Dimostrare che ogni sottoinsieme aperto (non vuoto) di $\mathbb{R}$ è l'unione di una famiglia al più numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti.

3. Dimostrare che gli unici sottoinsiemi *clopen* (cioè, aperti e chiusi) di $\mathbb{R}$ sono $\emptyset$ e $\mathbb{R}$.

4. Dimostrare che ogni sottoinsieme infinito non numerabile di $\mathbb{R}$ ha almeno un punto di accumulazione.

5. *Introduzione.* Da un famoso teorema (di Baire) segue che: se X è uno spazio metrico completo ricoperto da una famiglia al più numerabile di insiemi chiusi, allora almeno uno dei chiusi ha l'interno non vuoto.
   Problema. Provate a dimostrare che $\mathbb{R}$ non può essere scritto come l'unione di una famiglia $\mathcal{C}$ di intervalli chiusi (eventualmente degeneri) a due a due disgiunti tale che
   $$2 \leq |\mathcal{C}| \leq |\mathbb{N}|.$$
   (Suggerimento: il caso di $\mathcal{C}$ finita segue facilmente da uno dei problemi precedenti; per dimostrare il caso di $\mathcal{C}$ infinita numerabile, utilizzate la "Introduzione" sopra, cosiderando l'insieme degli estremi degli intervalli di $\mathcal{C}$.)

6. Dimostrare che il piano euclideo non può essere ricoperto da una famiglia di cerchi chiusi (non degeneri) i cui interni siano a due a due disgiunti. (Cioè, il piano non può essere "piastrellato" con piastrelle circolari. Suggerimento: trovate il modo di usare il problema precedente.)

7. Sia π una *permutazione* di $\mathbb{N}$, cioè, una funzione biiettiva $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Data una successione $\{x_n\}_n$ di numeri reali, possiamo considerare la corrispondente *successione permutata* $\{x_{\pi(n)}\}_n$. Sia $p \in \overline{\mathbb{R}}$. Dimostrare che:
   $$x_n \to p \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{\pi(n)} \to p.$$
   (Notate che ciò è molto diverso dal caso delle serie numeriche: può succedere che $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converga mentre $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ diverga oppure sia irregolare.)

8. Sia $\{a_n\}_n \subset [0, +\infty)$ una successione tale che
   $$a_{m+n} \leq a_m + a_n \quad \text{per ogni } m, n \in \mathbb{N} \qquad \text{(subadditività)}.$$

(a) Dimostrate che il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$ esiste finito.

(b) Vale lo stesso anche se sostituiamo l'ipotesi di subadditività con:

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n + c \quad \text{per ogni } m, n \in \mathbb{N},$$

dove $c > 0$ è una costante?